

Orthogonalité et projections orthogonales

Cours #10



MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

À l'issue du cours précédent, vous êtes capables :

- d'interpréter la relation entre matrices semblables au sens des applications linéaires qu'elles décrivent ;
- de justifier qu'une matrice carrée est diagonalisable ou non ;
- de diagonaliser une matrice carrée lorsque cela est possible ;
- de calculer des valeurs et vecteurs propres complexes ;
- de factoriser une matrice 2×2 à valeurs propres complexes par une matrice de rotation.

À l'issue de ce cours, vous serez capables :

- de généraliser les notions de produit scalaire et de norme à des espaces vectoriels quelconque ;
- de montrer que deux vecteurs d'un espace vectoriel sont orthogonaux ;
- d'identifier le complément orthogonal d'un sous-espace vectoriel ;
- d'exploiter la relation d'orthogonalité entre les quatre sous-espaces fondamentaux d'une matrice ;
- de montrer qu'une famille est une base orthogonale ou orthonormée d'un espace ;
- de calculer des projetés orthogonaux sur des sous-espaces vectoriels.

1 Notion d'orthogonalité dans un espace vectoriel

2 Bases orthonormées, matrices orthogonales

3 Projections orthogonales

1 Notion d'orthogonalité dans un espace vectoriel

2 Bases orthonormées, matrices orthogonales

3 Projections orthogonales

Définition

Soient $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. On appelle **produit scalaire** entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ le nombre

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\top \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i \in \mathbb{R}.$$

Définition

Soient $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. On appelle **produit scalaire** entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ le nombre

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\top \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i \in \mathbb{R}.$$

Note : On évitera la notation $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, qui est moins lisible.

Définition

Soient $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. On appelle **produit scalaire** entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ le nombre

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\top \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i \in \mathbb{R}.$$

Note : On évitera la notation $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, qui est moins lisible.

Proposition

Pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, le produit scalaire vérifie les propriétés suivantes.

- 1 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ (symétrie)
- 2 $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ (linéarité selon la première variable 1)
- 3 $\langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ (linéarité 2)
- 4 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ (positivité)
- 5 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (définition)

Le produit scalaire permet de généraliser la notion de norme dans $\mathbb{R}^n$.

Définition

Soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. On appelle **norme** de $\mathbf{u}$ le nombre

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

Si $\|\mathbf{u}\| = 1$, le vecteur $\mathbf{u}$ est dit **unitaire**.

Le produit scalaire permet de généraliser la notion de norme dans $\mathbb{R}^n$.

Définition

Soit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. On appelle **norme** de $\mathbf{u}$ le nombre

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

Si $\|\mathbf{u}\| = 1$, le vecteur $\mathbf{u}$ est dit **unitaire**.

Exemple

Soit $\mathbf{u} = (1, -2, 2, 0) \in \mathbb{R}^4$. Donner un vecteur unitaire de même direction et de même sens que $\mathbf{u}$.

En réalité, il est possible de définir un produit scalaire sur des espaces vectoriels qui ne sont pas $\mathbb{R}^n$, ce qui permet de généraliser l'idée de norme. Par exemple :

- sur $\mathbb{P}_n$, avec $p_1(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$ et $p_2(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_0$, on a :

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \sum_{i=0}^n a_i b_i.$$

En réalité, il est possible de définir un produit scalaire sur des espaces vectoriels qui ne sont pas $\mathbb{R}^n$, ce qui permet de généraliser l'idée de norme. Par exemple :

- sur $\mathbb{P}_n$, avec $p_1(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$ et $p_2(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_0$, on a :

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \sum_{i=0}^n a_i b_i.$$

- si f et g sont des fonctions périodiques de période T et que fg est intégrable sur $[0, T]$, on peut définir le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt.$$

En réalité, il est possible de définir un produit scalaire sur des espaces vectoriels qui ne sont pas $\mathbb{R}^n$, ce qui permet de généraliser l'idée de norme. Par exemple :

- sur $\mathbb{P}_n$, avec $p_1(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$ et $p_2(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_0$, on a :

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \sum_{i=0}^n a_i b_i.$$

- si f et g sont des fonctions périodiques de période T et que fg est intégrable sur $[0, T]$, on peut définir le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt.$$

Exemple

Soit $p(t) = t^2 - 3$. Donner un polynôme de $\mathbb{P}_2$ unitaire colinéaire à p .

Définition

Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. On appelle **distance** entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ le nombre

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Définition

Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. On appelle **distance** entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ le nombre

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Exemple

Soient $\mathbf{u} = (2, 3)$ et $\mathbf{v} = (-1, 2)$. Donner $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Définition

Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. On appelle **distance** entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ le nombre

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Exemple

Soient $\mathbf{u} = (2, 3)$ et $\mathbf{v} = (-1, 2)$. Donner $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Proposition

Pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

Démonstration.



Définition

Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. On dit que $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont **orthogonaux** si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Ceci est noté $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Définition

Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. On dit que $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont **orthogonaux** si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Ceci est noté $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Proposition

Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

1 $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ *(inégalité triangulaire)*

2 $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ si et seulement si $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Démonstration du point 2.



Définition

Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. On dit que $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont **orthogonaux** si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Ceci est noté $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Proposition

Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

1 $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (inégalité triangulaire)

2 $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ si et seulement si $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Démonstration du point 2.



Question : Le point 2 est la généralisation à $\mathbb{R}^n$ d'un théorème que vous connaissez depuis longtemps. Lequel ?

Proposition

Deux vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si et seulement si $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{dist}(\mathbf{u}, -\mathbf{v})$.

Démonstration.

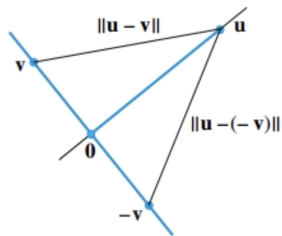


Figure – Tirée du livre de référence.

Proposition

Deux vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si et seulement si $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{dist}(\mathbf{u}, -\mathbf{v})$.

Démonstration.

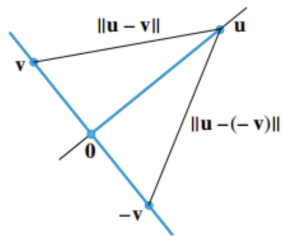


Figure – Tirée du livre de référence.

Question : Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \perp \mathbf{v}.$$

Trouver $\mathbf{u}$.

Définition

Soient V et W deux espaces vectoriels. Ces espaces sont dits **orthogonaux** si

$$\forall \mathbf{v} \in V, \forall \mathbf{w} \in W, \quad \mathbf{v} \perp \mathbf{w}.$$

On note alors $V \perp W$.

Exemple

Soient

$$V = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad W = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Montrer que $V \perp W$.

1 Soient V et W deux espaces vectoriels orthogonaux. Donner $V \cap W$.

2 Donner plusieurs exemples de sous-espaces vectoriels orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

3 Est-il possible que deux plans de $\mathbb{R}^3$ soient orthogonaux ?

Définition

Soient V un espace vectoriel et W un sous-espace vectoriel de V . On appelle **complément orthogonal** (ou simplement *orthogonal*) de W l'ensemble $W^\perp$ de tous les vecteurs de V orthogonaux à chacun des vecteurs de W .

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \forall \mathbf{w} \in W, \mathbf{v} \perp \mathbf{w}\}.$$

Définition

Soient V un espace vectoriel et W un sous-espace vectoriel de V . On appelle **complément orthogonal** (ou simplement *orthogonal*) de W l'ensemble $W^\perp$ de tous les vecteurs de V orthogonaux à chacun des vecteurs de W .

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \forall \mathbf{w} \in W, \mathbf{v} \perp \mathbf{w}\}.$$

Exemple

Soit $W = \text{Vect} \{(1, 2, 3)\}$. Donner une base de $W^\perp$.

Proposition

Soient V un espace vectoriel et W un sous-espace vectoriel de V . $W^\perp$ est également un sous-espace vectoriel de V dont la dimension est donnée par

$$\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W).$$

Démonstration.



Rappel : Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, quatre espaces sont remarquables :

$$\boxed{\mathbb{R}^m}$$

- $\text{Im}(A)$ est l'espace engendré par les colonnes de A .
→ $\dim(\text{Im}(A)) = \text{rang}(A)$
- $\text{Ker}(A^\top)$ est le noyau à gauche de A .
→ $\dim(\text{Ker}(A^\top)) = m - \text{rang}(A)$

$$\boxed{\mathbb{R}^n}$$

- $\text{Ker}(A)$ est le noyau de A .
→ $\dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rang}(A)$
- $\text{Lgn}(A) = \text{Im}(A^\top)$ est l'espace des lignes de A .
→ $\dim(\text{Lgn}(A)) = \text{rang}(A)$

Rappel : Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, quatre espaces sont remarquables :

$$\boxed{\mathbb{R}^m}$$

- $\text{Im}(A)$ est l'espace engendré par les colonnes de A .
→ $\dim(\text{Im}(A)) = \text{rang}(A)$
- $\text{Ker}(A^\top)$ est le noyau à gauche de A .
→ $\dim(\text{Ker}(A^\top)) = m - \text{rang}(A)$

$$\boxed{\mathbb{R}^n}$$

- $\text{Ker}(A)$ est le noyau de A .
→ $\dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rang}(A)$
- $\text{Lgn}(A) = \text{Im}(A^\top)$ est l'espace des lignes de A .
→ $\dim(\text{Lgn}(A)) = \text{rang}(A)$

Théorème

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. On a :

$$(\text{Im}(A))^\perp = \text{Ker}(A^\top) \quad \text{et} \quad (\text{Ker}(A))^\perp = \text{Lgn}(A).$$

Démonstration.



- 1** Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Donner une représentation schématique des quatre sous-espaces fondamentaux de A mentionnant :
- les inclusions dans $\mathbb{R}^m$ et dans $\mathbb{R}^n$;
 - les dimensions des sous-espaces ;
 - les relations d'orthogonalité entre les sous-espaces.
- 2** Donner une base du complément orthogonal de $\mathbb{R}^n$.
- 3** Quelle relation existe-t-il entre $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ et l'angle orienté $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$?

1 Notion d'orthogonalité dans un espace vectoriel

2 Bases orthonormées, matrices orthogonales

3 Projections orthogonales

Définition

Soit V un espace vectoriel. Une famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p)$ de vecteurs de V est dite **orthogonale** si ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire si $i \neq j \implies \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$.

Si de plus, les vecteurs de cette famille sont tous unitaires ($\|\mathbf{u}_i\| = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$), elle est dite **orthonormée** (ou **orthonormale**).

Définition

Soit V un espace vectoriel. Une famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p)$ de vecteurs de V est dite **orthogonale** si ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire si $i \neq j \implies \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$.

Si de plus, les vecteurs de cette famille sont tous unitaires ($\|\mathbf{u}_i\| = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$), elle est dite **orthonormée** (ou **orthonormale**).

Proposition

Toute famille orthogonale **ne contenant pas le vecteur nul** est libre.

Démonstration.



Exemple

Considérons la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right).$$

- 1 Cette famille est-elle orthogonale ? Si oui, la transformer en une famille orthonormée.
- 2 L'opération de normalisation des vecteurs que vous venez d'effectuer a-t-elle changé la relation d'orthogonalité entre ces vecteurs ?

Soit $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ une famille orthonormée de vecteurs de $\mathbb{R}^5$. On pose $U = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3]$.
Calculer $U^\top U$.

Soit $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ une famille orthonormée de vecteurs de $\mathbb{R}^5$. On pose $U = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3]$.
Calculer $U^\top U$.

Proposition

Soit $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Les colonnes de U sont orthonormées $\iff U^\top U = I_m$.

Remarque : Cette proposition s'applique à toutes les matrices, pas uniquement aux matrices carrées. Ainsi, si $U^\top U = I$, cela n'implique pas que U soit inversible !

Soit $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ une famille orthonormée de vecteurs de $\mathbb{R}^5$. On pose $U = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3]$.
Calculer $U^\top U$.

Proposition

Soit $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Les colonnes de U sont orthonormées $\iff U^\top U = I_m$.

Remarque : Cette proposition s'applique à toutes les matrices, pas uniquement aux matrices carrées. Ainsi, si $U^\top U = I$, cela n'implique pas que U soit inversible !

Exemple

En reprenant la famille proposée à la slide 20, illustrer cette proposition.

Proposition

Soient $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice dont les colonnes sont orthonormées et $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

1 $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|.$

2 $\langle U\mathbf{x}, U\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$

3 $\langle U\mathbf{x}, U\mathbf{y} \rangle = 0 \iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0.$

Démonstration.



Définition

Soit V un espace vectoriel. Une famille orthogonale formant une base de V est appelée une **base orthogonale** de V . Une famille orthonormée de V formant une base de V est appelée une **base orthonormée** de V .

Définition

Soit V un espace vectoriel. Une famille orthogonale formant une base de V est appelée une **base orthogonale** de V . Une famille orthonormée de V formant une base de V est appelée une **base orthonormée** de V .

Définition

Une matrice **carrée** dont les colonnes sont orthonormées est appelée une **matrice orthogonale**.

Définition

Soit V un espace vectoriel. Une famille orthogonale formant une base de V est appelée une **base orthogonale** de V . Une famille orthonormée de V formant une base de V est appelée une **base orthonormée** de V .

Définition

Une matrice **carrée** dont les colonnes sont orthonormées est appelée une **matrice orthogonale**.

Le terme "matrice orthonormée" (ou "orthonormale") n'existe pas.

Définition

Soit V un espace vectoriel. Une famille orthogonale formant une base de V est appelée une **base orthogonale** de V . Une famille orthonormée de V formant une base de V est appelée une **base orthonormée** de V .

Définition

Une matrice **carrée** dont les colonnes sont orthonormées est appelée une **matrice orthogonale**.

Le terme "matrice orthonormée" (ou "orthonormale") n'existe pas.

Question : Quel est le lien entre les deux définitions précédentes ?

Théorème

Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ une base orthogonale de V . Si $\mathbf{x} \in V$, alors

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \dots + c_n \mathbf{b}_n$$

où

$$c_i = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_i \rangle}{\|\mathbf{b}_i\|^2}.$$

Démonstration.



Théorème

Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ une base orthogonale de V . Si $\mathbf{x} \in V$, alors

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \dots + c_n \mathbf{b}_n$$

où

$$c_i = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_i \rangle}{\|\mathbf{b}_i\|^2}.$$

Démonstration.



Question : Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de V , que valent les coordonnées c_i ?

1 Notion d'orthogonalité dans un espace vectoriel

2 Bases orthonormées, matrices orthogonales

3 Projections orthogonales

Soient V un espace vectoriel et $\mathbf{v} \in V$. Si $\mathbf{y} \in V$, on cherche à décomposer $\mathbf{y}$ en deux vecteurs :

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$$

où $\hat{\mathbf{y}}$ est colinéaire à $\mathbf{v}$ et $\mathbf{z}$ est orthogonal à $\mathbf{v}$. Autrement dit, on cherche un scalaire α tel que

$$\mathbf{y} = \alpha \mathbf{v} + \mathbf{z}$$

où $\mathbf{z} \perp \mathbf{v}$. On veut donc :

$$\langle \mathbf{y} - \alpha \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \implies \quad \alpha = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

Définition

Soient V un espace vectoriel et $\mathbf{v} \in V$. Si $\mathbf{y} \in V$, la **projection orthogonale** de $\mathbf{y}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\mathbf{v}$ (ou simplement sur $\mathbf{v}$) est donnée par :

$$\text{Proj}_{\text{Vect}\{\mathbf{v}\}}(\mathbf{y}) = \text{Proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}.$$

Définition

Soient V un espace vectoriel et $\mathbf{v} \in V$. Si $\mathbf{y} \in V$, la **projection orthogonale** de $\mathbf{y}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\mathbf{v}$ (ou simplement sur $\mathbf{v}$) est donnée par :

$$\text{Proj}_{\text{Vect}\{\mathbf{v}\}}(\mathbf{y}) = \text{Proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}.$$

Exemple

Soient $\mathbf{y} = (7, 6)$ et $\mathbf{v} = (4, 2)$.

- 1 Calculer la projection orthogonale de $\mathbf{y}$ sur $\mathbf{v}$.
- 2 Écrire $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$ où $\hat{\mathbf{y}}$ est colinéaire à $\mathbf{v}$ et $\mathbf{z} \perp \mathbf{v}$. Vérifier que $\hat{\mathbf{y}} \perp \mathbf{z}$.
- 3 Déterminer $\text{dist}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}})$ et $\|\mathbf{z}\|$.
- 4 Vérifier que $\mathbf{z} = \text{Proj}_{\text{Vect}\{\mathbf{v}\}^\perp}(\mathbf{y})$.
- 5 Tracer le tout.

Théorème

Soient V un espace vectoriel et W un sous-espace vectoriel de V . Tout vecteur $\mathbf{y} \in V$ admet une décomposition **unique** sous la forme

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$$

avec $\hat{\mathbf{y}} \in W$ et $\mathbf{z} \in W^\perp$. Le vecteur $\hat{\mathbf{y}}$ est appelé la **projection orthogonale** de $\mathbf{y}$ sur W , notée $\text{Proj}_W(\mathbf{y})$.

Théorème

Soient V un espace vectoriel et W un sous-espace vectoriel de V . Tout vecteur $\mathbf{y} \in V$ admet une décomposition **unique** sous la forme

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$$

avec $\hat{\mathbf{y}} \in W$ et $\mathbf{z} \in W^\perp$. Le vecteur $\hat{\mathbf{y}}$ est appelé la **projection orthogonale** de $\mathbf{y}$ sur W , notée $\text{Proj}_W(\mathbf{y})$.

- D'après la slide précédente, si W est une droite vectorielle engendrée par $\mathbf{v} \in V$, alors $\text{Proj}_W(\mathbf{y}) = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}$.
- Et si $\dim(W) \geq 2$?

Pour projeter un vecteur y sur un sous-espace vectoriel W , il faut connaître une base de W .
Savoir si cette base est orthogonale ou non va déterminer si le calcul est facile...

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

Pour projeter un vecteur $\mathbf{y}$ sur un sous-espace vectoriel W , il faut connaître une base de W . Savoir si cette base est orthogonale ou non va déterminer si le calcul est facile...

Proposition

Soient V un espace vectoriel et W un sous-espace vectoriel de V . Si $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$ est une base **orthogonale** de W , alors pour tout $\mathbf{y} \in V$:

$$\text{Proj}_W(\mathbf{y}) = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 + \dots + \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_p \rangle}{\|\mathbf{v}_p\|^2} \mathbf{v}_p.$$

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

Pour projeter un vecteur $\mathbf{y}$ sur un sous-espace vectoriel W , il faut connaître une base de W . Savoir si cette base est orthogonale ou non va déterminer si le calcul est facile...

Proposition

Soient V un espace vectoriel et W un sous-espace vectoriel de V . Si $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$ est une base **orthogonale** de W , alors pour tout $\mathbf{y} \in V$:

$$\text{Proj}_W(\mathbf{y}) = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 + \dots + \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_p \rangle}{\|\mathbf{v}_p\|^2} \mathbf{v}_p.$$

Et si on ne connaît pas de base orthogonale ?

Proposition

Soient V un espace vectoriel et W un sous-espace vectoriel de V . Soient $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$ une base (quelconque) de W et $U = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_p]$. Pour tout $\mathbf{y} \in V$, on a :

$$\text{Proj}_W(\mathbf{y}) = \text{Proj}_{\text{Im}(U)}(\mathbf{y}) = U(U^\top U)^{-1}U^\top \mathbf{y}.$$

Proposition

Soient V un espace vectoriel et W un sous-espace vectoriel de V . Si $\mathbf{y} \in V$, alors $\hat{\mathbf{y}} = \text{Proj}_W(\mathbf{y})$ est le vecteur de W le plus proche de $\mathbf{y}$, dans le sens où :

$$\forall \mathbf{v} \in W, \quad \text{dist}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) \leq \text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{v}).$$

1 Soient

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et $W = \text{Vect} \{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \}$.

1 Montrer que $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ est une base orthogonale de W .

2 Calculer $\text{Proj}_W(\mathbf{y})$.

3 Écrire $\mathbf{y}$ comme la somme de deux vecteurs, l'un appartenant à W et l'autre à $W^\perp$.

2 Dans le cas général, si $\mathbf{y} \in W$, que vaut $\text{Proj}_W(\mathbf{y})$? Interpréter cela graphiquement.

Exercices récapitulatifs

Dire des énoncés suivants s'ils sont vrais ou faux, et justifier.

1. Si U est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, alors $U^\perp$ est nécessairement de dimension $n - \dim(U)$, peu importe U .
2. Si une matrice A est symétrique, alors ses colonnes forment toujours une famille orthogonale.
3. Si un vecteur appartient à deux sous-espaces orthogonaux entre eux, alors il est forcément nul.
4. Soit A une matrice symétrique, alors $\text{Ker } A \perp \text{Im } A$.
5. Si une matrice A est telle que $A^T A = I$, alors A est carrée.
6. Dans $\mathbb{R}^3$, l'intersection de deux sous-espaces orthogonaux est toujours un espace vectoriel de dimension 1.

7. Soit e_i et e_j deux vecteurs distincts de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $\text{dist } e_i e_j = 2$
8. Soit u et v deux vecteurs orthonormés, alors $\text{dist}(u, v) \leq 2$.
9. Une matrice ayant des colonnes normalisée est nécessairement inversible.
10. Si y est un vecteur quelconque et U un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, alors la norme de la projection de y sur U est toujours inférieure ou égale à la norme de y .

Soit $V \subseteq E$ un SEV de E un EV. Cet exercice a pour but de prouver que $(V^\perp)^\perp = V$ (si vous voulez vous challenger, vous pouvez essayer de le prouver sans utiliser les sous questions).

Partie 1 $(V^\perp)^\perp \subseteq V$: Soit $x \in (V^\perp)^\perp$, comme $x \in E$ on peut écrire $x = x_V + x_{V^\perp}$ avec $x_V \in V, x_{V^\perp} \in V^\perp$.

1.a. Justifiez que $x \cdot x_{V^\perp} = 0$ (indice : que dire de $V^\perp$ et $(V^\perp)^\perp$?)

1.b. Montrez que $x_{V^\perp} = 0$.

1.c Concluez que $x \in V$

Partie 2 $V \subseteq (V^\perp)^\perp$: Soit $x \in V$.

2.a Soit $v \in V^\perp$, que dire de $x \cdot v$?

2.b Concluez que $x \in (V^\perp)^\perp$.

Soit la famille de vecteurs F_1 dans $\mathbb{R}^3$:

$$F_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$$

1. Cette famille est-elle orthogonale ?
2. Retirez un vecteur de F_1 pour obtenir une base F_2 orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
3. Transformez F_2 en base orthonormée B .
4. Calculez $\text{Proj}_{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} (\text{Vect} \{y_1, y_2\})$. 5. Calculez $\text{Proj}_{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} (\text{Vect} \{y_1, y_4\})$.

Soient V et W deux espaces vectoriels tel que :

$$V = \text{Vect} \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \quad W = \text{Vect} \{w_1, w_2, \dots, w_p\}.$$

Nous voulons prouver :

$$V \perp W \Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\} \perp \{w_1, \dots, w_p\}.$$

Partie 1 : $\Rightarrow$

Supposons $V \perp W$.

- 1** Montrez que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$, v_i est orthogonal à w_j .
- 2** Concluez que $\{v_1, \dots, v_n\} \perp \{w_1, \dots, w_p\}$.

Partie 2 : $\Leftarrow$

Supposons maintenant que $\{v_1, \dots, v_n\} \perp \{w_1, \dots, w_p\}$.

3. Soient $v \in V$ et $w \in W$, justifiez qu'il existe des constantes $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_p)$ telles que :

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, \quad w = b_1 w_1 + \dots + b_p w_p.$$

4. En utilisant ces expressions, montrez que $v \cdot w = 0$.
5. Concluez que $V \perp W$.

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, et soit :

$$O = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]$$

une matrice orthogonale.

1. Montrez que $O^\top v_i = e_i$, où e_i est le i -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2. Sachant que :

$$O^\top O = [O^\top v_1 \quad O^\top v_2 \quad \dots \quad O^\top v_n]$$

concluez que $O^\top O = I$.

En réalité :

$$O \text{ est orthogonale} \Leftrightarrow O^\top O = I.$$

3. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\| = 1$, montrez que :

$$H = I_n - 2vv^\top$$

est une matrice orthogonale.

4. Montrez que H est aussi symétrique.

5. Soient A et B deux matrices orthogonales et symétriques telles que :

$$AB = -BA.$$

Montrez que $\frac{1}{\sqrt{2}}(A + B)$ est symétrique et orthogonale.