

Propriétés des matrices symétriques

Cours #12



MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

À l'issue du cours précédent, vous êtes capables :

- d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt sur une famille libre de vecteurs de \mathbb{R}^n afin de la transformer en une famille orthogonale ;
- de calculer une factorisation QR d'une matrice en appliquant le procédé de Gram-Schmidt ;
- d'utiliser les équations normales associées au système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pour en identifier des solutions au sens des moindres carrés ;
- de calculer l'erreur quadratique associée à une solution d'un système linéaire au sens des moindres carrés.

À l'issue de ce cours, vous serez capables :

- d'écrire la diagonalisation d'une matrice en base orthonormée lorsque cela est possible ;
- d'utiliser le théorème spectral pour faire le lien entre matrices diagonalisables en base orthonormée et matrices symétriques ;
- d'identifier la forme quadratique associée à une matrice symétrique ;
- d'identifier la matrice symétrique associée à une forme quadratique ;
- de déterminer le signe d'une forme quadratique à l'aide des valeurs propres de la matrice associée ;
- d'effectuer un changement de variable pour éliminer les termes rectangle apparaissant dans une forme quadratique.

- 1 Diagonalisation des matrices symétriques en base orthonormée et théorème spectral
- 2 Formes quadratiques

1 Diagonalisation des matrices symétriques en base orthonormée et théorème spectral

2 Formes quadratiques

La notion de matrice symétrique est visuelle : pour montrer que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique, on cherche typiquement à observer que $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Par exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cette approche fonctionne pour observer qu'une matrice donnée est symétrique, mais elle est constituée généralement d'une très mauvaise idée pour des raisonnements plus abstraits.

Exemple

Soient $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ où C est une matrice symétrique. Montrer que la matrice $D = ABCB^T A^T$ est symétrique.

Définition

Une matrice **carrée** A est dite **symétrique** si $A^T = A$.

Proposition

Toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles.

Démonstration.



Proposition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique. Les vecteurs propres appartenant à des sous-espaces propres de A **distincts** sont orthogonaux. Autrement dit, si $\lambda_1, \lambda_2 \in \text{Sp}(A)$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et $\mathbf{v}_1 \in \text{Ker}(A - \lambda_1 I)$, $\mathbf{v}_2 \in \text{Ker}(A - \lambda_2 I)$, alors

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0.$$

Démonstration.



- Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est diagonalisable si et seulement s'il est possible d'identifier n vecteurs propres de A qui soient linéairement indépendants. Ces vecteurs forment **une base** de \mathbb{R}^n .
- L'avantage de cette base est que l'application linéaire $x \mapsto Ax$ est représentée, dans cette base, par une matrice **diagonale**.
- Au cours #10, nous avons montré que des bases particulièrement intéressantes pour effectuer des projections sont... **les bases orthonormées**.
- La question qui vient naturellement est donc la suivante :

*Sous quelles conditions sur $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ peut-on identifier une base **orthonormée** de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de A ?*

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. On dit que A est **diagonalisable en base orthonormée** s'il existe une base **orthonormée** de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres de A .

Proposition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A est diagonalisable en base orthonormée si et seulement s'il existe une matrice diagonale $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice **orthogonale** $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que

$$A = PDP^{\top}.$$

Démonstration.



La proposition suivante nous permet de restreindre notre recherche des matrices diagonalisables en base orthonormée.

Proposition

Si une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est diagonalisable en base orthonormée, elle doit être symétrique.

Démonstration.



Nous avons identifié une condition **nécessaire** pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable en base orthonormée. En réalité, cette condition est aussi suffisante !

Théorème (spectral)

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Les énoncés suivants sont équivalents.

- 1 A est symétrique.
- 2 A est diagonalisable en base orthonormée.
- 3 Il existe $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonale et $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonale telles que $A = PDP^T$.

Démonstration. ■ (2) \implies (1) est le sens démontré à la slide 9.

■ (2) \iff (3) est démontré à la slide 10.

■ (1) \implies (2) peut être démontré par induction sur la taille de A , mais cette démonstration est plus difficile que les autres. Une version accessible peut être trouvée sur cette page. □

Remaque : Diagonalisable en base orthonormée veut aussi dire diagonalisable tout court, donc d'autres implications peuvent être tirées de ce qui précède ! Notamment :

$$A = A^T \implies \forall \lambda \in \text{Sp}(A), \text{MG}(\lambda) = \text{MA}(\lambda).$$

Exemple

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

En sachant que $p_A(\lambda) = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 2)$, diagonaliser A en base orthonormée.

Remarque : Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$ vérifiant $\text{MA}(\lambda) \geq 2$, il faut penser à orthogonaliser (avec Gram-Schmidt) la base obtenue de $\text{Ker}(A - \lambda I)$!

La possibilité de diagonaliser $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en base orthonormée indique quelque chose de magnifique concernant l'application linéaire $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Soit $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ une base orthonormée de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres de A . On peut alors écrire :

$$A = PDP^T = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T.$$

Il en résulte que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= (\lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T) \mathbf{x} \\ &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T \mathbf{x} + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T \mathbf{x} \\ &= \lambda_1 \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \mathbf{v}_n \\ &= \lambda_1 \text{Proj}_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{x}) + \lambda_2 \text{Proj}_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_n \text{Proj}_{\mathbf{v}_n}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Donc Ax est en fait une combinaison linéaire des projections de x sur les sous-espaces propres de A !

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique. On appelle **décomposition spectrale** de A la somme

$$A = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^\top + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^\top + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^\top$$

où la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de A associés respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Exemple

Donner une décomposition spectrale de la matrice proposée à la slide 12.

1 Diagonalisation des matrices symétriques en base orthonormée et théorème spectral

2 Formes quadratiques

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$, que vaut le produit $\mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$?

→ Une matrice symétrique est une façon pratique de représenter certaines fonctions de plusieurs variables.

Définition

Une fonction $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée une **forme quadratique** si elle peut s'écrire sous la forme

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique.

1 Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}.$$

Déterminer la forme quadratique associée à A .

- 2** Soit $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ par $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$. Donner la matrice associée à la forme quadratique Q .
- 3** Soit $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ par $Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3$. Donner la matrice associée à la forme quadratique Q .
- 4** Montrer que l'application $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $Q(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ est une forme quadratique en donnant sa matrice associée.

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \left(a_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_i x_j \right).$$

- Les termes de forme $a_{ii} x_i^2$ sont appelés des termes **carrés**.
- Les termes de forme $a_{ij} x_i x_j$ sont appelés des termes **rectangles**.

Pour calculer efficacement $Q(\mathbf{x})$, on a intérêt à se débarrasser des termes rectangles.

Question : Quelle condition sur A permettrait que Q soit composée uniquement de termes carrés ?

Puisque A est symétrique, on peut la diagonaliser en base orthonormée (en vertu du théorème spectral) sous forme $A = PDP^T$.

Posons $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$. La forme quadratique engendrée par A s'écrit alors :

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = (P\mathbf{y})^T A (P\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{y}^T P^T (PDP^T) P \mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}^T (P^T P) D (P^T P) \mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}^T D \mathbf{y} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2. \end{aligned}$$

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique dont la diagonalisation en base orthonormée s'écrit $A = PDP^T$. Le **changement de variable** éliminant les termes rectangles dans la forme quadratique $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ est l'opération $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$.

Exemple

On considère $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 5x_2^2 - 8x_1x_2$. Effectuer un changement de variable tel que $Q(\mathbf{y})$ n'ait pas de termes rectangles.

Definition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique dont la diagonalisation en base orthonormée s'écrit $A = PDP^T$. Les vecteurs propres qui constituent les colonnes de P sont appelés les **axes principaux** de la forme quadratique $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$.

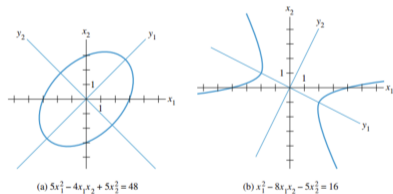


Figure – Forme non-usuelle des formes quadratiques

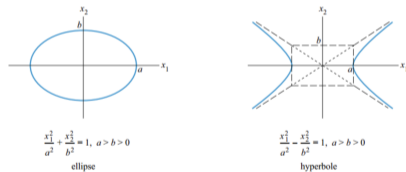


Figure – Forme usuelle des formes quadratiques

Dans ces définitions, on considère $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique et Q la forme quadratique définie par $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$.

Définition

A et Q sont dites

- **définies positives** si pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $Q(\mathbf{x}) > 0$;
- **semi-définies positives** si pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $Q(\mathbf{x}) \geq 0$.

On note :

$$A \succ 0 \text{ et } A \succeq 0.$$

Définition

A et Q sont dites

- **définies négatives** si pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $Q(\mathbf{x}) < 0$;
- **semi-définies négatives** si pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $Q(\mathbf{x}) \leq 0$.

On note :

$$A \prec 0 \text{ et } A \preceq 0.$$

Définition

A et Q sont dites **indéfinies** s'il existe à la fois $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $Q(\mathbf{x}_1) > 0$ et $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ tel que $Q(\mathbf{x}_2) < 0$.

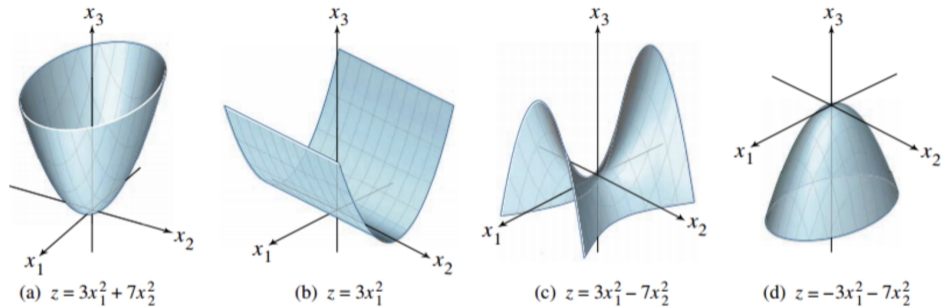


Figure – Classification des formes

Remarque : On parle souvent du **signe** de la forme quadratique Q .

Théorème

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique.

- $A \succ 0$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.
- $A \prec 0$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives.
- A est indéfinie si et seulement si elle admet au moins une valeur propre > 0 et une valeur propre < 0 .
- $A \succeq 0$ si et seulement si les valeurs propres de A sont positives ou nulles.
- $A \preceq 0$ si et seulement si les valeurs propres de A sont négatives ou nulles.

Démonstration. Ceci se prouve grâce à un changement de variable permettant de n'exprimer Q qu'avec des termes carrés. □

Soit $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$. On note

$$A_1 = [a_{11}], A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \dots, A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \text{ et } A_n = A.$$

Théorème (critère de Sylvester)

A est définie positive si et seulement si $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \det(A_k) > 0$.

Proposition

A est définie négative si et seulement si A est définie positive.

Pour déterminer le signe de A (et de la forme quadratique $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$), il faut...

- 1 (Optionnel, pour gagner du temps!) essayer d'utiliser le critère de Sylvester.
 - Si $\det(A_k) > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, A est définie positive.
 - Sinon, s'intéresser à $-A$: si $\det(-A_k) > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, A est définie négative.
 - Si aucune de ces étapes n'a abouti, on ne peut rien conclure.
- 2 calculer $\text{Sp}(A)$.
 - Si on trouve uniquement des valeurs propres strictement positives ($\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$), A est définie positive.
 - Si on trouve uniquement des valeurs propres strictement négatives ($\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-^*$), A est définie négative.
 - Si on trouve à la fois des valeurs propres positives et nulles ($\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$), A est semi-définie positive.
 - Si on trouve à la fois des valeurs propres négatives et nulles ($\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-$), A est semi-définie négative.
 - Si on trouve à la fois des valeurs propres > 0 et < 0 , A est indéfinie.

Exemple

Classifier la forme $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$

On considère la fonction : f définie par $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - x_1 + 2x_2$.

- 1 Déterminer les points critiques de f ,
- 2 Déterminer la nature de ces points critiques.

Rappels :

- 1 Les points critiques d'une fonction s'obtiennent en cherchant les points \mathbf{x}^* tels que le gradient de f est nul : $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$
- 2 La nature des points critiques dépend du signe de la Hessienne de f : $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$.
 - 1 Si $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \succ 0$ alors \mathbf{x}^* est un minimum local
 - 2 Si $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \prec 0$ alors \mathbf{x}^* est un maximum local
 - 3 sinon, elle est indéfinie.

Exercices récapitulatifs

Répondez par Vrai ou Faux aux questions suivantes, justifiez à chaque fois.

1. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique avec n valeurs propres distinctes. Il est possible de trouver une base non-orthogonale de vecteurs propres de A .
2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique avec n valeurs propres. Il est possible de trouver une base non-orthogonale de vecteurs propres de A .
3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique et soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ toutes les valeurs propres de A (peut-être différentes de 1), alors $\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 I) + \dim \text{Ker}(A - \lambda_2 I) + \dim \text{Ker}(A - \lambda_3 I) = n$.
4. **(difficile)** Soit $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ tel que $A = v_1 v_1^\top + v_2 v_2^\top$ alors A n'est pas inversible. (indice : essayez de trouver P tel que $A = P D P^\top$, quel serait D ?)

5. Une matrice inversible est forcément symétrique.
6. Une matrice symétrique n'a que des valeurs propres réelles.
7. Soit A une matrice symétrique et orthogonale, alors $A^2 = I$.
8. Avec $Q(x) = 2x_1x_2$ la matrice A tel que $Q(x) = x^\top Ax$ possède 0 comme valeur propre.
9. La fonction Q tel que $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1$ est une forme quadratique.
10. Une matrice symétrique définie positive est inversible.
11. La somme de deux matrices définie négative est définie négative.
12. Soit A symétrique définie négative, alors A^2 est définie positive.

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

1. Sans faire de calculs, A est-elle diagonalisable ?
2. Trouvez $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et D diagonale tel que $A = PDP^T$.

Soit $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une application tel que $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3$

1. Trouvez la matrice A symétrique telle que $Q(x) = x^T Ax$
2. Effectuez le changement de variable $y = Px$ tel que $Q(y)$ n'ai pas de terme quadratique.
3. A est-elle définie positive ? Définie négative ? Semi définie positive ? Semi définie négative ? Indéfinie ?