# Décomposition en valeurs singulières

Cours #13

MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

# Bilan du cours précédent

À l'issue du cours précédent, vous êtes capables :

- d'écrire la diagonalisation d'une matrice en base orthonormée lorsque cela est possible ;
- d'utiliser le théorème spectral pour faire le lien entre matrices diagonalisables en base orthonormée et matrices symétriques ;
- d'identifier la forme quadratique associée à une matrice symétrique ;
- d'identifier la matrice symétrique associée à une forme quadratique ;
- de déterminer le signe d'une forme quadratique à l'aide des valeurs propres de la matrice associée ;
- d'effectuer un changement de variable pour éliminer les termes rectangle apparaissant dans une forme quadratique.

# Objectifs

À l'issue de ce cours, vous serez capables :

- d'écrire la décomposition en valeurs singulières d'une matrice quelconque ;
- d'identifier des bases des sous-espaces fondamentaux d'une matrice dans sa décomposition en valeurs singulières.

# Plan de cours

- Diagonaliser une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ revient à chercher une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle l'application $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ peut être décrite par une matrice diagonale $D$. On a : $A = PDP^{-1}$.

- Question centrale dans ce cours :

  *Peut-on généraliser la diagonalisation à des matrices qui ne sont pas carrées ?*

- Réponse : **oui** ! Pour ce faire, on doit chercher **deux bases** : une base de $\mathbb{R}^n$, et une base de $\mathbb{R}^m$. On cherche alors une décomposition de forme

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_m \end{bmatrix}}_{\text{base de } \mathbb{R}^m} \begin{bmatrix} D & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}}_{\text{base de } \mathbb{R}^n}^{\top} = U\Sigma V^{\top}.$$

- Une décomposition ainsi obtenue est appelée une **décomposition en valeurs singulières** de $A$.

# Plan de cours

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que $\mathrm{rang}(A) = r$.

- $A^\top A$ est symétrique et semi-définie positive.
- Si on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $A^\top A$ **répétées selon leurs multiplicités algébriques**, on a :

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \ldots = \lambda_n = 0.$$

### Définition

Les racines carrées des $r$ premières valeurs propres de $A^\top A$ sont appelées les **valeurs singulières** de $A$, et généralement notées $\sigma_i$ :

$$\forall i \in [\![1; r]\!], \quad \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}.$$

Idée centrale : si $\operatorname{rang}(A) = r$, $A$ est capable d'envoyer une famille libre de $r$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vers une famille libre de $r$ vecteurs de $\mathbb{R}^m$.

- Soit $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $A^\top A$. On peut en extraire la famille libre $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r)$. Pour décomposer $A$ en valeurs singulières, on cherche des vecteurs $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$ vérifiant

$$\forall i \in [\![1; r]\!], \quad A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i.$$

- Si ces vecteurs peuvent être trouvés, on a alors la relation

$$A \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r \end{bmatrix}.$$

**Théorème**

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que $\operatorname{rang}(A) = r$. On peut décomposer $A$ sous la forme

$$A = U \Sigma V^\top = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$$

où $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices orthogonales, et

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathrm{O} & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & \mathrm{O} & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

avec $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r > 0$ les valeurs singulières de $A$.

## Définition

Une décomposition de $A$ sous forme $A = U\Sigma V^\top$ est appelée **décomposition en valeurs singulières** de $A$. On abrège souvent par SVD pour l'anglais *Singular Value Decomposition*. De plus,

- les $r$ premières colonnes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ de $V$ sont appelées les **vecteurs singuliers** de $A$ ;
- les $r$ premières colonnes $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ de $U$ sont appelées les **vecteurs singuliers à gauche** de $A$.

Construire la SVD de $A$ nécessite deux familles de vecteurs : les colonnes de $U$, et celles de $V$.

- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs propres de $A^\top A$ associés à $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2$. On peut montrer qu'ils forment une base de $\mathrm{Lgn}(A)$ [1].
- $\mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{v}_{r+2}, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ forment une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(A)$.
- $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r \in \mathbb{R}^m$ peuvent être choisis comme suit :

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i, \quad \text{pour } i \in [\![1; r]\!].$$

  On peut montrer que ces vecteurs forment une base orthonormée de $\mathrm{Im}(A)$.
- $\mathbf{u}_{r+1}, \mathbf{u}_{r+2}, \ldots \mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^m$ forment une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(A^\top)$.

1. Le plus facile : par construction, $(\mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{v}_{r+2}, \ldots, \mathbf{v}_n)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(A)$, donc les colonnes restantes constituent une base de $\mathrm{Ker}(A)^\perp = \mathrm{Lgn}(A)$

# Éléments clés de la SVD

Cette décomposition peut se comprendre en deux étapes.

1. On "imite" les relations entre vecteurs et valeurs propres pour une matrice carrée :

$$A\mathbf{v}_1 = \sigma_1 \mathbf{u}_1, A\mathbf{v}_2 = \sigma_2 \mathbf{u}_2, \ldots, A\mathbf{v}_r = \sigma_r \mathbf{u}_r, \text{ soit :}$$

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_r \end{bmatrix}}_{V_r} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_r \end{bmatrix}}_{U_r} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_r \end{bmatrix}}_{\Sigma_r}.$$

2. On complète $U_r$ et $V_r$ par des vecteurs permettant d'obtenir des matrices $U$ et $V$ orthogonales, de sorte que la relation soit étendue sous la forme

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} V_r & \mathbf{v}_{r+1} & \mathbf{v}_{r+2} & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}}_{V} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_r & \mathbf{u}_{r+1} & \mathbf{u}_{r+2} & \ldots & \mathbf{u}_m \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_r & \mathrm{O}_{r,(n-r)} \\ \mathrm{O}_{(m-r),r} & \mathrm{O}_{(m-r),(n-r)} \end{bmatrix}}_{\Sigma}.$$

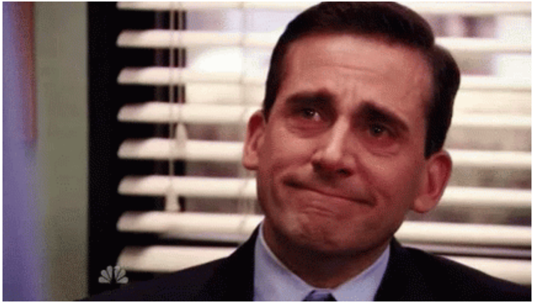
Puisque $V$ est orthogonale, on utilise $V^{-1} = V^\top$, et on obtient $A = U\Sigma V^\top$.

## Méthode

1. Calculer $A^\top A$.
2. Diagonaliser $A^\top A$ en base orthonormée :
   - Déterminer ses valeurs propres rangées par ordre croissant $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ (répétées avec la multiplicité algébrique). On doit avoir : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r > \underbrace{\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n}_{=0}$.
   - Déterminer une famille orthonormée de vecteurs propres $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ dans le même ordre que les valeurs propres.
3. Calculer les $r$ valeurs singulières de $A$ avec $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour $i \in [\![1; r]\!]$ (toujours en gardant l'ordre établi précédemment !).
4. Déterminer la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ :
   - Calculer les $r$ vecteurs singuliers à gauche $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i$ pour $i \in [\![1; r]\!]$.
   - Si $r < m$, compléter avec $(\mathbf{u}_{r+1}, \mathbf{u}_{r+2}, \ldots, \mathbf{u}_m)$ une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(A^\top)$.
5. Écrire la décomposition en valeurs singulières $A = U\Sigma V^\top$.

Cette construction permet de décrire $A$ à travers ses quatre sous-espaces fondamentaux !

$$A = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{u}_1 \;\; \dots \;\; \mathbf{u}_r}_{\mathrm{Im}(A)} & \underbrace{\mathbf{u}_{r+1} \;\; \dots \;\; \mathbf{u}_m}_{\mathrm{Ker}(A^\top)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_r & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{v}_1 \;\; \dots \;\; \mathbf{v}_r}_{\mathrm{Lgn}(A)} & \underbrace{\mathbf{v}_{r+1} \;\; \dots \;\; \mathbf{v}_n}_{\mathrm{Ker}(A)} \end{bmatrix}$$

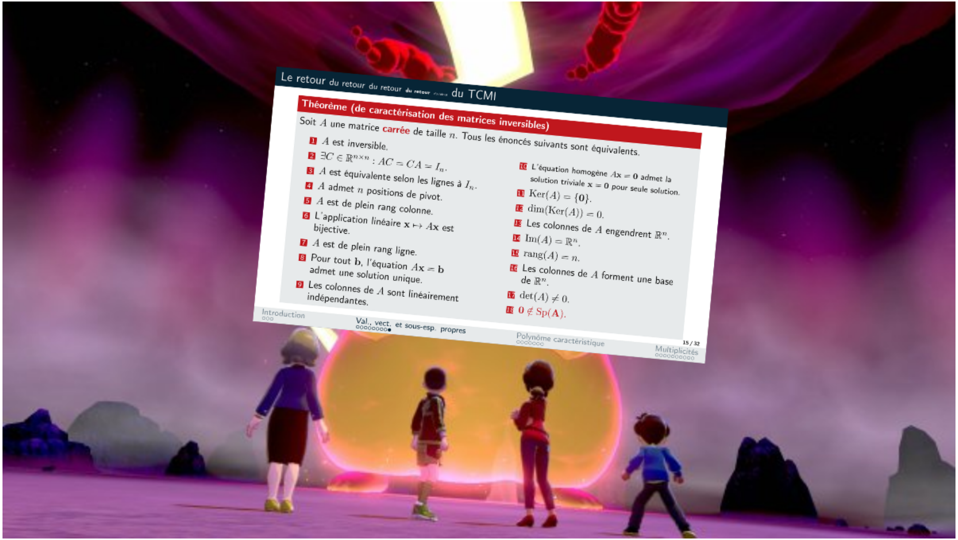


# Exercices

Déterminer des décompositions en valeurs singulières de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

# L'au revoir du TCMI



# Plan de cours

Supposons que le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ soit compatible. En notant $\sigma_{\min}(A)$ la plus petite valeur singulière de $A$ et $\sigma_{\max}(A)$ la plus grande, on définit le nombre

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)}.$$

- Ce nombre est appelé le **conditionnement** de $A$.
- Il mesure la sensibilité du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ : plus il est élevé, plus une petite perturbation de $\mathbf{b}$ engendrera une grande perturbation sur la solution obtenue.

$$A = U\Sigma V^\top = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^\top + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^\top + \ldots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^\top.$$

- $\mathrm{rang}(\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top) = 1$.
- Que se passe-t-il si on tronque cette somme avec $p < r$ ?

$$A \approx \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^\top + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^\top + \ldots + \sigma_p \mathbf{u}_p \mathbf{v}_p^\top.$$

- On peut approximer $A$ par une matrice de rang $p$ ! Ceci est **extrêmement utile** pour réduire l'espace mémoire nécessaire pour stocker certaines données (compression), pour visualiser des données multidimensionnelles (analyse en composantes principales)...
- Un exemple visuel avec la compression d'images :
`https://timbaumann.info/svd-image-compression-demo/`

Votre cours d'algèbre linéaire est à présent terminé...

un grand merci à vous pour cette belle session et plein de bonnes choses pour la suite de votre parcours ! ☺

# Exercices récapitulatifs

# Exercice 1 récapitulatif - Vrai ou Faux

1. Les valeurs singulières d'une matrice sont toujours négatives.
2. Toute matrice carrée admet une décomposition en valeurs singulières.
3. Si $A$ est $3 \times 2$, alors $A^\top A$ est $2 \times 2$.
4. Une matrice $A$ diagonale a toujours une SVD simple avec $U = V = I$ et $\Sigma = A$.
5. Si une matrice $A$ est nulle, alors toutes ses valeurs singulières sont nulles.
6. La SVD d'une matrice réelle peut contenir des matrices $U$ et $V$ complexes.
7. La SVD existe uniquement pour les matrices carrées.
8. Les colonnes de $V$ dans la SVD de $A$ sont n'importe quelle base de vecteurs propres de $A^\top A$.

# Exercice 2 récapitulatif - Décomposition SVD

Soit la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 5 & -1 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

Calculez une décomposition en valeurs singulières de $A$ :

$$A = U\Sigma V^\top$$

# Exercice 3 récapitulatif - Propriétés de la SVD

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ avec $A = U\Sigma V^\top$ sa décomposition en valeurs singulières,
soient $\sigma_i$ les valeurs singulières de $A$ et $\lambda_i$ les valeurs propres de $A^\top A$,
$V = [v_1 \ \cdots \ v_n]$, $U = [u_1 \ \cdots \ u_m]$, et $r = \text{rang}(A)$.

**1)** Montrez que pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, $u_i$ est vecteur propre de $AA^\top$.
Pour quelle valeur propre ? (indice : rappelez-vous comment on calcule les $u_i$)

**2)** Montrez que pour $i \in \{r+1, \ldots, m\}$, $u_i$ est vecteur propre de $A$ pour la valeur propre $0$.
(indice : on complète une base de $\text{Im}(A)$ et $\text{Im}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A)$)

**3)** Donnez une expression d'une SVD de $A^\top$ en fonction de $\Sigma$, $U$ et $V$.

Vous remarquez que, si cela vous chante, vous pouvez faire toute la démarche de la SVD avec $AA^\top$ plutôt que $A^\top A$.
Les vecteurs propres de $AA^\top$ sont en réalité les $u_i$ !