Applications linéaires

Cours #6

MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

Bilan du cours précédent

À l'issue du cours précédent, vous êtes capables :

- de calculer la dimension d'un espace vectoriel ;
- de caractériser une matrice par son rang ;
- d'utiliser le rang d'une matrice pour justifier l'existence et/ou l'unicité de solutions à des systèmes d'équations linéaires ;
- d'exprimer des vecteurs d'un espace vectoriels dans plusieurs de ses bases.

À l'issue de ce cours, vous serez capables :

- de montrer qu'une application entre deux espaces vectoriels est linéaire ;
- de calculer la matrice associée à une application linéaire $T : V \to W$ dans les bases canoniques de V et W ;
- d'exprimer l'application linéaire associée à une matrice ;
- d'interpréter l'existence et l'unicité de solutions à un système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en termes d'injectivité et de surjectivité de l'application linéaire $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

Plan de cours

Plan de cours

Qu'est-ce qu'une fonction ?

Ce que vous connaissez jusqu'ici...

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow \boxed{\;f\;} \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

... fonctionnerait aussi avec des vecteurs !

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \boxed{\;f\;} \longrightarrow f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$$

Définition d'une application

Application $\approx$ fonction.

Définition

Soient V et W deux espaces vectoriels. On appelle **application** de V dans W toute "règle de calcul" qui transforme un vecteur de V en un vecteur de W. Une telle application T est notée :

$$T: \begin{array}{ccc} V & \to & W \\ \mathbf{x} \in V & \mapsto & T(\mathbf{x}) \in W. \end{array}$$

Dans ce cas,

- V est appelé l'**espace de départ** de T ;
- W est appelé l'**espace d'arrivée** de T.
- $T(\mathbf{x}) \in W$ est appelé l'**image** de $\mathbf{x} \in V$ par T.

Exemples

1.
$$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x. \end{array}$$
est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2.
$$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x} & \mapsto & \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 - x_1 \end{bmatrix}. \end{array}$$
est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Définition

Soient V et W deux espaces vectoriels réels et $T : V \to W$. On dit que T est une application **linéaire** si :

1. $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V)$, $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.
2. $(\forall \mathbf{u} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R})$, $T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$.

- On déduit du point (2) que si T est linéaire, alors $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.
- Comme pour la caractérisation des s.e.v., on peut regrouper les conditions (1) et (2) en un seul point :

$$T \text{ est linéaire} \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}),\ T(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + \alpha T(\mathbf{v}).$$

- On montrera dans la section 2 du cours qu'il y a un moyen un peu plus facile de montrer que T est linéaire...

1. Montrer que l'application

$$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} & \mapsto & \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_2 - x_3 \end{bmatrix}. \end{array}$$

   est linéaire.

2. Si on considère l'application T dont l'ensemble de départ est $\mathbb{R}^{m\times n}$ et définie par $T(A) = A^\top$, quel est l'espace d'arrivée de T ? T est-elle linéaire ?

3. L'application calculant l'inverse d'une matrice inversible $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est-elle linéaire ?

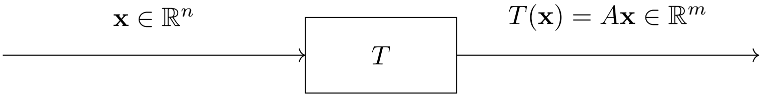
4. L'application

$$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{P}_1 & \to & \mathbb{P}_2 \\ p(t) & \mapsto & tp(t). \end{array}$$

   est-elle linéaire ?

Une matrice est... une application linéaire ?

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, le produit matrice-vecteur $A\mathbf{x}$ est une "règle de calcul" qui transforme $\mathbf{x}$ en un vecteur $A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.



Exemple

Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

et l'application T définie par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

1. Quel est l'espace de départ de T ?
2. Quel est l'espace d'arrivée de T ?
3. Donner l'image de $\mathbf{x} = (1, -2)$ par T.

Une matrice est... une application linéaire ?

Une matrice $m \times n$ est un tableau de nombres

Une matrice $m \times n$ est un ensemble de coefficients d'un système de m équations linéaires à n inconnues

Une matrice $m \times n$ est une collection de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ organisés en colonnes

Une matrice $m \times n$ est la représentation d'une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension n dans un espace vectoriel de dimension m

Exemple

On a montré que l'application

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_2 - x_3 \end{bmatrix}. \end{array}$$

est linéaire. Déterminer une matrice A telle que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Théorème

Soient V un espace vectoriel de dimension n et W un espace vectoriel de dimension m.

1. Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, l'application définie par
$$\begin{array}{rccc} T: & V & \to & W \\ & \mathbf{x} & \mapsto & A\mathbf{x} \end{array}$$
est linéaire.
2. Si on étudie une application linéaire $T : V \to W$, alors il existe nécessairement une unique matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ telle que
$$\forall \mathbf{x} \in V, \quad T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

1. Montrons d'un seul coup les deux propriétés de linéarité : soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) &= A(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) \\ &= A\mathbf{u} + A(\alpha\mathbf{v}) \\ &= A\mathbf{u} + \alpha(A\mathbf{v}) \\ &= T(\mathbf{u}) + \alpha T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

2. Il faut passer par une base de V. Soit $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ une base de V (rappelons que $\dim(V) = n$). Si $\mathbf{x} \in V$, il existe donc des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \ldots + x_n\mathbf{b}_n$. Donc :

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T(x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \ldots + x_n\mathbf{b}_n) \\ &= T(x_1\mathbf{b}_1) + T(x_2\mathbf{b}_2) + \ldots + T(x_n\mathbf{b}_n) \\ &= x_1T(\mathbf{b}_1) + x_2T(\mathbf{b}_2) + \ldots + x_nT(\mathbf{b}_n) \\ &= \begin{bmatrix} T(\mathbf{b}_1) & T(\mathbf{b}_2) & \ldots & T(\mathbf{b}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = A\mathbf{x}. \end{aligned}$$

(unicité : section 1.9, exercice 33.)

Du théorème précédent, on peut déduire ce qui suit :

Méthode

Si

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

on calcule la matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ **canoniquement associée** à T de la façon suivante :

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \ldots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Astuce !

Pour montrer que $T : V \to W$ est linéaire, il suffit de trouver une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

On peut aussi parler du noyau et de l'image de T :

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(A) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(A).$$

Proposition

Soient T_1 et T_2 des applications linéaires dont les matrices associées sont respectivement A et B. La matrice associée à la composition $T_2 \circ T_1$ est obtenue par le produit matriciel BA.

Démonstration.

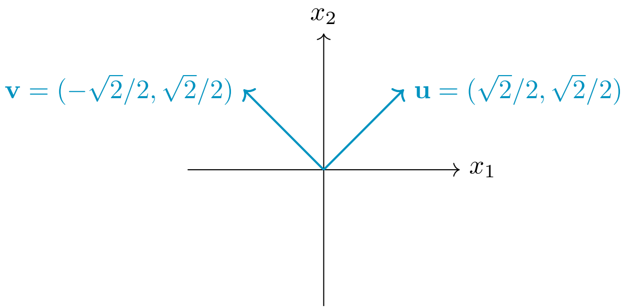
$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1(\mathbf{x}) &= B(T_1(x)) \\ &= BA\mathbf{x}. \end{aligned}$$

$\square$

Soient

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

et $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Calculer et dessiner $T(\mathbf{u})$ et $T(\mathbf{v})$ sur la figure suivante, puis décrire l'effet géométrique de T sur ces deux vecteurs.



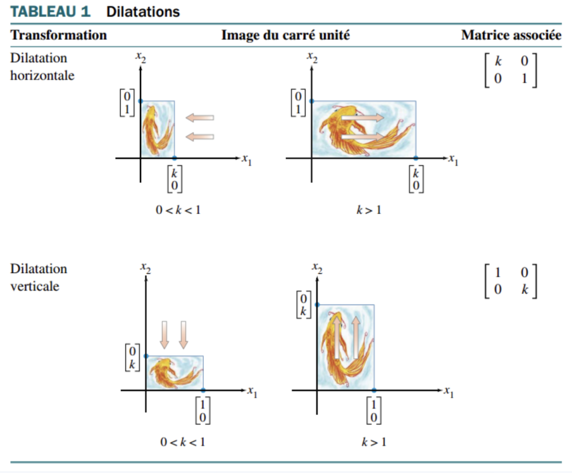


TABLEAU 1 Dilatations

Transformation	Image du carré unité		Matrice associée
Dilatation horizontale	$0 < k < 1$	$k > 1$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Dilatation verticale	$0 < k < 1$	$k > 1$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

Figure – Tirée du manuel de référence (p.79)

Dilate d'un coefficient $k > 0$ selon l'un des axes. L'effet est différent selon que $k > 1$ ou $0 < k < 1$.

TABLEAU 3 Transvections

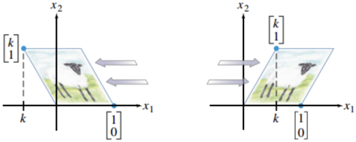
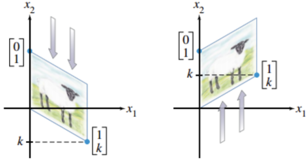
Transformation	Image du carré unité	Matrice associée
Transvection horizontale	 $k < 0$ $k > 0$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Transvection verticale	 $k < 0$ $k > 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

Figure – Tirée du manuel de référence (p.81)

Interprétation géométrique de quelques applications linéaires | Projections

TABLEAU 4 Projections

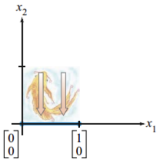
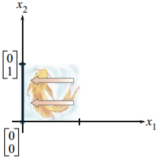
Transformation	Image du carré unité	Matrice associée
Projection sur l'axe des x_1		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Projection sur l'axe des x_2		$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Figure – Tirée du manuel de référence (p.81)

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. La matrice effectuant la rotation des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ centrée en l'origine est donnée par

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de cette matrice. Dépend-t-il de θ ?
2. Déterminer la matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ centrée en l'origine.
3. Montrer que la composée d'une rotation d'angle θ_1 puis d'une rotation d'angle θ_2 est de nouveau une rotation. Donner l'angle de cette nouvelle rotation.

Aide : on rappelle que

$$\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2).$$

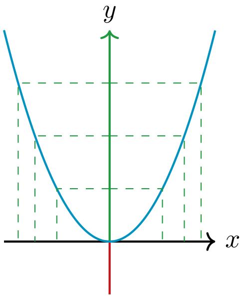
Plan de cours

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. On peut se poser deux questions...

Si $y \in \mathbb{R}$, peut-on trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que

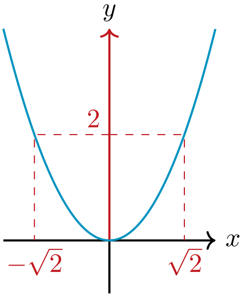
$$y = f(x)?$$

Pas toujours...



Si $y \in \mathbb{R}$ admet un antécédent par la fonction f, cet antécédent est-il unique ?

Impossible...



Définition

Soient V et W deux espaces vectoriels. Une application $T : V \to W$ est dite **injective** si tout vecteur de W est l'image d'**au plus** un vecteur de V par T. Ceci peut aussi s'écrire :

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{v}' \implies T(\mathbf{v}) \neq T(\mathbf{v}').$$

Proposition

Soient $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définie par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Alors :

$$\begin{aligned} T \text{ est injective} &\iff \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \text{ il existe au plus un seul } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } T(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \\ &\iff \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \text{ le SÉL } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ admet au plus une solution (0 ou 1)} \\ &\iff \text{les colonnes de } A \text{ sont linéairement indépendantes} \\ &\iff A \text{ est de plein rang colonne} \\ &\iff \operatorname{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}. \end{aligned}$$

Définition

Soient V et W deux espaces vectoriels. Une application $T : V \to W$ est dite **surjective** si tout vecteur de W est l'image d'**au moins** un vecteur de V par T. Ceci peut aussi s'écrire :

$$\forall \mathbf{w} \in W, \quad \exists \mathbf{v} \in V \text{ tel que } \mathbf{w} = T(\mathbf{v}).$$

Proposition

Soient $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définie par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Alors :

$$\begin{aligned} T \text{ est surjective } &\iff \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } T(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \\ &\iff \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \text{ le SÉL } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ est compatible (1 ou } \infty \text{ de sol.)} \\ &\iff \text{les colonnes de } A \text{ engendrent } \mathbb{R}^m \\ &\iff \mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^m \\ &\iff A \text{ est de plein rang ligne.} \end{aligned}$$

Théorème (de caractérisation des matrices inversibles)

Soit A une matrice **carrée** de taille n. Tous les énoncés suivants sont équivalents.

1. A est inversible.
2. $\exists C \in \mathbb{R}^{n\times n} : AC = CA = I_n$.
3. A est équivalente selon les lignes à I_n.
4. A admet n positions de pivot.
5. A est de plein rang colonne.
6. **L'application linéaire $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ est injective.**
7. A est de plein rang ligne.
8. **L'application linéaire $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ est surjective.**
9. Pour tout $\mathbf{b}$, l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une solution unique.
10. L'équation homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet la solution triviale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pour seule solution.
11. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
12. $\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$.
13. $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 0$.
14. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$.
15. $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.
16. $\mathrm{rang}(A) = n$.
17. Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$.
18. $\det(A) \neq 0$.

L'injectivité est une question d'**unicité**.

Chaque vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ admet **au maximum** un antécédent par T.

$\rightarrow$ le SÉL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet 0 ou 1 solution, quel que soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

La surjectivité est une question d'**existence**.

Chaque vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ admet **au minimum** un antécédent par T.

$\rightarrow$ le SÉL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet 1 ou ∞ solution(s), quel que soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Attention !

1. Même si injectivité et surjectivité se lisent sur la matrice A associée à une application linéaire T, on ne dira **jamais** que "A est injective/surjective". Ces qualificatifs sont réservés à T.
2. Subtilité concernant la surjectivité : si T est surjective et que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ admet une solution unique pour un seul $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, alors c'est vrai pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. De même pour les systèmes admettant une infinité de solutions.

Exercices

1. On dit qu'une application T est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. Montrer que dans le cas d'une application linéaire définie par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, on a :

$$T \text{ est bijective} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ est inversible.}$$

(ce qui fait un dix-neuvième point à rajouter au TCMI !)

2. Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ avec $m > n$. L'application linéaire définie par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ peut-elle être injective ? Surjective ? Bijective ?

3. Même question qu'au (2) avec $m < n$.

4. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}. \end{array}$$

est linéaire et bijective.

Exercices récapitulatifs

Q1) Soit $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f une application linéaire telle que :

$$f(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f(e_3) = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Donnez la matrice A associée à f.

Q2) f est-elle surjective ? Est-elle injective ? Est-elle bijective ?

Q3) Soit f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \mathbf{x} & \longmapsto & \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Est-ce une application linéaire ?

Q4) Soit $n \geq 1$. Soit f définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{P}_n & \longrightarrow & \mathbb{P}_{n^2} \\ p(t) & \longmapsto & p(p(t)) \end{array}$$

f est-elle une application linéaire ?

Q4 Bis) Soit $n = 0$. Soit f définie (comme juste avant) par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{P}_n & \longrightarrow & \mathbb{P}_{n^2} \\ p(t) & \longmapsto & p(p(t)) \end{array}$$

f est-elle une application linéaire ?

Q5) Soit B une base d'un EV nommé V, soit $\mathcal{E}$ la base canonique de V. Soit l'application linéaire T (T comme traduction) définie par : $T: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ x & \longmapsto & [x]_B \end{array}$ T est-elle linéaire ? Quelle est sa matrice associée ? T est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? (Rappelez vous que $[x]_B = P_{B \leftarrow \mathcal{E}} x$)

Q6) La fonction cosinus est-elle injective ? Surjective sur $\mathbb{R}$?

Q7) Soit T une application linéaire telle que :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}(T) \quad \text{et} \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 14 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Donnez la matrice A associée à T.

Q8) (bonus) *(Cet exercice n'est à faire que si vous souhaitez vous challenger, il est particulièrement technique)*
Soit T définie par :

$$T: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (r, \theta) & \longmapsto & \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix} \end{array}$$

Montrez que T est bijective. Montrez aussi que T n'est pas linéaire. ($\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des réels positifs ou nuls)