Valeurs propres et vecteurs propres

Cours #8

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

Bilan du cours précédent

À l'issue du cours précédent, vous êtes capables :

- d'effectuer des opérations sur des nombres complexes sous formes algébrique, polaire et exponentielle ;
- de transformer un nombre complexe d'une de ces trois formes à une autre ;
- de calculer le module et un argument d'un nombre complexe et de les interpréter géométriquement ;
- de résoudre une équation polynômiale de degré 2 dans $\mathbb{C}$;
- de calculer les racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe ;
- de manipuler des vecteurs et matrices à coefficients complexes.

Objectifs

À l'issue de ce cours, vous serez capables :

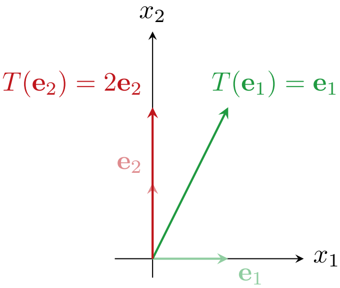
- de vérifier qu'un vecteur donné est un vecteur propre d'une matrice, et de calculer la valeur propre à laquelle il est associé ;
- d'identifier une base d'un sous-espace propre d'une matrice ;
- de calculer les valeurs propres d'une matrice à l'aide de son polynôme caractéristique ;
- de calculer les multiplicités arithmétique et géométrique d'une valeur propre.

Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

et l'application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Comment visualiser la transformation géométrique des vecteurs du plan effectuée par T ?

Réponse (donnée au cours #6) : observer la transformation que subissent les vecteurs de la base canonique $\rightarrow$ animation 1.



Mais... est-ce vraiment ce qu'il y a de plus simple à voir ?

En réalité, toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ se décompose comme : **rotation + dilatation/contraction** des vecteurs de la base canonique.

Il serait donc plus simple de visualiser l'effet de T en s'intéressant aux **vecteurs qui ne subissent que des dilatations/contractions** $\to$ animation 2.

Question : soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $T(\mathbf{x})$ corresponde à une simple dilatation/contration de $\mathbf{x}$. Décrire (avec le vocabulaire connu) la relation entre les vecteurs $\mathbf{x}$ et $T(\mathbf{x})$.

$\to$ $\mathbf{x}$ et $T(\mathbf{x})$ sont **colinéaires** : ils partagent la même direction. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{T(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}}$$

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une **valeur propre** de A s'il existe un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ avec $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, tel que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Le vecteur $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ est alors appelé un **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ.

Remarque : L'équation $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ présuppose que les vecteurs $A\mathbf{x}$ et $\lambda\mathbf{x}$ soient de même taille, donc que A soit **carrée**. C'est pour cette raison que valeurs et vecteurs propres ne sont définis que pour des matrices carrées.

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le **spectre** de A, et noté $\mathrm{Sp}(A)$. On écrira donc indifféremment :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \in \mathrm{Sp}(A).$$

Exemple

Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

1. $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont-ils des vecteurs propres de A ? Si oui, déterminer la valeur propre de A à laquelle ils sont associés.
2. Montrer que $7 \in \mathrm{Sp}(A)$ et déterminer un vecteur propre qui lui est associé. Y en a-t-il plusieurs ? Si oui, combien ?

L'exemple précédent vous a fait réaliser qu'il pouvait y avoir une infinité de vecteurs propres associés à une même valeur propre. C'est en fait toujours le cas. Pourquoi ?

Définition

Soient $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. On appelle **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ l'espace $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$.

Attention ! Il n'est pas vrai de dire que $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ est l'ensemble des vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ. Pourquoi ?

Exemple

Avec les données de l'exemple de la slide 9, décrire les sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1 = -4$ et $\lambda_2 = 7$.

Théorème

Soient $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ des vecteurs propres de A associés respectivement à chacune des valeurs propres de A. La famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r)$ est libre.

Autrement dit, toute famille constituée de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes de A, est libre.

Démonstration (partie 1). Supposons $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ soit liée. L'un au moins de ces vecteurs est une combinaison linéaire de ceux qui le précèdent. Soit p le plus petit indice tel que $\mathbf{v}_{p+1}$ soit une combinaison linéaire des vecteurs précédents (lesquels sont alors nécessairement linéairement indépendants). Il existe donc des scalaires $c_1, \ldots, c_p$ tels que

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{p+1} \tag{1}$$

En multipliant à gauche les deux membres de la relation (1) par A :
$A\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k$, on obtient

$$c_1 A\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p A\mathbf{v}_p = A\mathbf{v}_{p+1}$$

$$c_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_p \lambda_p \mathbf{v}_p = \lambda_{p+1} \mathbf{v}_{p+1} \tag{2}$$

En multipliant les deux membres de la relation (1) par λ_{p+1} et en retranchant le résultat à la relation (2), on a

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1})\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1})\mathbf{v}_p = 0 \tag{3}$$

Comme les vecteurs $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ sont linéairement indépendants, les coefficients de la relation (3) sont tous nuls. Mais les valeurs propres étant distinctes, aucun des facteurs $\lambda_i - \lambda_{p+1}$ n'est nul. Il en résulte que $c_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, p$. En reportant dans la relation (1), on obtient $\mathbf{v}_{p+1} = 0$, ce qui est impossible. C'est donc que les vecteurs $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ ne peuvent être linéairement dépendants, et qu'ils forment bien une famille libre.

1. Soit
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$
En sachant que $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 5\}$, déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A.

2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $0 \in \mathrm{Sp}(A)$. Que peut-on dire de particulier sur A ?

3. L'énoncé suivant est-il vrai ou faux ?

   Il est possible qu'une matrice carrée n'admette aucun vecteur propre (réel).

Théorème (de caractérisation des matrices inversibles)

Soit A une matrice **carrée** de taille n. Tous les énoncés suivants sont équivalents.

1. A est inversible.
2. $\exists C \in \mathbb{R}^{n\times n} : AC = CA = I_n$.
3. A est équivalente selon les lignes à I_n.
4. A admet n positions de pivot.
5. A est de plein rang colonne.
6. L'application linéaire $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ est bijective.
7. A est de plein rang ligne.
8. Pour tout $\mathbf{b}$, l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une solution unique.
9. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
10. L'équation homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet la solution triviale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pour seule solution.
11. $\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$.
12. $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 0$.
13. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$.
14. $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.
15. $\mathrm{rang}(A) = n$.
16. Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$.
17. $\det(A) \neq 0$.
18. $\mathbf{0} \notin \mathrm{Sp}(\mathbf{A})$.

Comment calculer des valeurs propres ?

La section précédente abordait le calcul de vecteurs propres associés à une valeur propre donnée. Mais comment déterminer les valeurs propres d'une matrice ? Repartons de la définition...

Proposition

Soient $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Équation caractéristique, polynôme caractéristique

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. On appelle **équation caractéristique** de A l'équation $\det(A - \lambda I_n) = 0$, d'inconnue λ.

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. L'expression

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

est un polynôme d'inconnue λ de degré n, appelé **polynôme caractéristique** de A.

Avec cette définition, on a l'équivalence suivante, sur laquelle on se reposera systématiquement pour déterminer le spectre d'une matrice :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad \Longleftrightarrow \quad p_A(\lambda) = 0.$$

Exemple

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer le polynôme caractéristique de A, puis $\mathrm{Sp}(A)$.

Méthode

Pour déterminer les valeurs propres de A et des vecteurs propres associés :

1. Calculer le polynôme caractéristique de A : $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.
2. Déterminer les racines de p_A. Ce sont les **valeurs propres** de A, qui forme le **spectre** $\mathrm{Sp}(A)$.
3. Pour chaque $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, déterminer le **sous-espace propre** associé à λ en calculant $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$.
4. Dans l'expression obtenue de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$, extraire une base de cet espace. Il s'agit de **vecteurs propres** associés à λ.

Proposition

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) sont les coefficients de sa diagonale.

Démonstration. □

Exercice

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A, i.e. $\mathrm{Sp}(A)$.
2. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A.
3. Pour chaque valeur propre λ de A, donner deux vecteurs propres associés à λ.

Plan de cours

Racines d'un polynôme et multiplicité algébrique

Soit p un polynôme de degré n. Il existe alors n nombres $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p(t) = (t - t_1)(t - t_2) \ldots (t - t_n).$$

Ces nombres sont appelés les *racines* de p.

Il est possible que certaines valeurs "se répètent" parmi les racines de p. Par exemple, à la slide 22, on avait trouvé :

$$p_A(\lambda) = \underbrace{(\lambda - 4)(\lambda - 4)}(\lambda - 2).$$

Le nombre d'occurrences d'une racine dans cette factorisation est appelé sa **multiplicité**. Ici, 4 est une racine de p_A de multiplicité 2. Les autres racines sont de multiplicité 1.

Définition

Soient $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. On appelle **multiplicité algébrique** de λ, notée $\mathrm{MA}(\lambda)$, sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I_n)$.

Multiplicité géométrique

Dans l'exercice de la slide 22, on avait trouvé...

- $\mathrm{MA}(2) = 1$ et une base de $\mathrm{Ker}(A - 2I)$ est $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.
- $\mathrm{MA}(4) = 2$ et une base de $\mathrm{Ker}(A - 4I)$ est $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Il semble donc exister un lien entre $\mathrm{MA}(\lambda)$ et le nombre de vecteurs dans une base de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$...Ceci motive l'introduction d'une nouvelle notion.

Définition

Soient $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. On appelle **multiplicité géométrique** de λ, notée $\mathrm{MG}(\lambda)$, la dimension du sous-espace propre de A associé à λ :

$$\mathrm{MG}(\lambda) = \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)).$$

Lien entre multiplicités d'une valeur propre

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, ces deux valeurs ne sont pas toujours égales.

Théorème

Soient $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Alors :

$$\mathrm{MG}(\lambda) \leq \mathrm{MA}(\lambda).$$

Démonstration. Ce résultat est loin d'être évident, sa démonstration n'est pas au programme de ce cours. □

Exemple

Vérifier que la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

admet bien une valeur propre λ satisfaisant l'inégalité stricte $\mathrm{MG}(\lambda) < \mathrm{MA}(\lambda)$.

Exercices récapitulatifs

Dire des énoncés suivants s'ils sont vrais ou faux, et justifier votre réponse.

1. Toute matrice carrée admet au moins une valeur propre réelle.
2. Toute matrice carrée admet au moins une valeur propre réelle.
3. Si une matrice A admet un vecteur propre, alors elle admet une infinité de valeurs propres distinctes.
4. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, soit $\mathbf{v} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Comme $A\mathbf{v} = 0\mathbf{v}$, $\mathbf{v}$ est un vecteur propre de A pour la valeur 0.
5. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A, alors c'est une valeur propre de $A^\top$.
6. Si $\mathbf{v}$ est un vecteur propre de A, alors c'est un vecteur propre de $A^\top$.
7. Si un vecteur est propre pour une matrice A, alors il est aussi propre pour A^2.

Exercice récapitulatif 2

Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre et donner leur dimension.

Soit A une matrice carrée 2×2 non inversible mais différente de la matrice nulle.

1. Quel est le rang de A ?
2. Montrer que 0 est une valeur propre de A.
3. Supposons en plus que $A^2 = A$. Montrer que 1 est une valeur propre de A.

Exercice récapitulatif 4

Soit la matrice "Attila" définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$.
2. Déterminer les sous-espaces propres associés et leur dimension.

Exercice récapitulatif 5

1. Soit $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ avec pour polynôme caractéristique $\det(B - \lambda I) = \lambda^2$. Montrer que B est la matrice nulle.

2. Soit R_θ la matrice de rotation d'angle θ :

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

   Pour quels angles R_θ possède-t-elle des valeurs propres réelles ?

3. Soit $D = \mathrm{Diag}(1, 2, 3, 4, 5)$. Donner ses valeurs propres.