

Diagonalisation

Cours #9



MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

À l'issue du cours précédent, vous êtes capables :

- de vérifier qu'un vecteur donné est un vecteur propre d'une matrice, et de calculer la valeur propre à laquelle il est associé ;
- d'identifier une base d'un sous-espace propre d'une matrice ;
- de calculer les valeurs propres d'une matrice à l'aide de son polynôme caractéristique ;
- de calculer les multiplicités arithmétique et géométrique d'une valeur propre.

À l'issue de ce cours, vous serez capables :

- d'interpréter la relation entre matrices semblables au sens des applications linéaires qu'elles décrivent ;
- de justifier qu'une matrice carrée est diagonalisable ou non ;
- de diagonaliser une matrice carrée lorsque cela est possible ;
- de calculer des valeurs et vecteurs propres complexes ;
- de factoriser une matrice 2×2 à valeurs propres complexes par une matrice de rotation.

- 1 Matrices semblables
- 2 Diagonalisation d'une matrice carrée
- 3 Valeurs et vecteurs propres complexes

1 Matrices semblables

2 Diagonalisation d'une matrice carrée

3 Valeurs et vecteurs propres complexes

Soient $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. A est donc la matrice associée à T dans la base canonique.

Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. On cherche une matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qui joue le même rôle dans la base $\mathcal{B}$, i.e. : pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = B[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.

Définition

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Les matrices A et B sont dites **semblables** s'il existe une matrice inversible $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que

$$A = PBP^{-1}.$$

Interprétation : deux matrices semblables décrivent la même application linéaire, mais dans des bases différentes.

Proposition

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si A et B sont semblables, alors :

- 1 A et B ont le même polynôme caractéristique : $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$;
- 2 A et B ont les mêmes valeurs propres : $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$;
- 3 A et B ont le même déterminant : $\det(A) = \det(B)$.

Démonstration.



1 Matrices semblables

2 Diagonalisation d'une matrice carrée

3 Valeurs et vecteurs propres complexes

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. On dit que A est **diagonalisable** si A est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonale et $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Une matrice diagonalisable peut faciliter de nombreuses opérations. Un premier exemple :

Proposition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice diagonalisable sous la forme $A = PDP^{-1}$. Si $k \in \mathbb{N}$, alors :

$$A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{bmatrix} d_{11}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn}^k \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Démonstration.



En réalité, si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est diagonalisable sous la forme $A = PDP^{-1}$, il n'existe qu'une démarche permettant de construire P et D .

Proposition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si A est diagonalisable sous la forme $A = PDP^{-1}$, alors :

- 1 les colonnes de P sont des vecteurs propres de A ;
- 2 les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A associées aux colonnes de P (dans le même ordre).

Démonstration.



Exemple

Si possible, diagonaliser les matrices suivantes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Question : La proposition précédente montre que si $A = PDP^{-1}$, les colonnes de P sont des vecteurs propres de A . Pour garantir que P soit inversible, que faut-il donc dire sur ces vecteurs propres ?

Théorème

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Les énoncés suivants sont équivalents.

- 1 A est diagonalisable.
- 2 On peut trouver n vecteurs propres de A linéairement indépendants.
- 3 Il existe une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A .

Autrement dit, A est diagonalisable si et seulement si elle admet suffisamment de vecteurs propres **indépendants** pour former une base de $\mathbb{R}^n$.

Rappel : au cours précédent, on a établi un résultat très important :

Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.

Question : Que se passe-t-il donc si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ possède n valeurs propres distinctes ?

Réponse :

Question : Quelles sont donc les matrices qui peuvent ne pas être diagonalisables ?

Réponse : Celles qui admettent des valeurs propres multiples ! ($\text{MA}(\lambda) \geq 2$ pour au moins un $\lambda \in \text{Sp}(A)$)

Exercice

Retrouver, dans le cours #8, l'exemple d'une matrice qui pourrait ne pas être diagonalisable.

Question : Si $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ avec $r < n$ (donc A admet moins de n valeurs propres distinctes), qu'est-ce qui garantirait que l'on peut tout de même trouver n vecteurs propres linéairement indépendants ?

Réponse : Il faut s'intéresser aux bases des sous-espaces propres de A . Si $\mathcal{B}_1$ est une base de $\text{Ker}(A - \lambda_1 I)$, $\mathcal{B}_2$ est une base de $\text{Ker}(A - \lambda_2 I)$, ..., et $\mathcal{B}_r$ est une base de $\text{Ker}(A - \lambda_r I)$, alors il faut que :

$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

Autrement dit, il faut que

$$\sum_{i=1}^r \dim(\text{Ker}(A - \lambda_i I)) = n.$$

Théorème

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \forall \lambda \in \text{Sp}(A), \text{MG}(\lambda) = \text{MA}(\lambda).$$

Ce théorème est valable pour **toutes** les matrices carrées. Vérifions que ce que nous avons énoncé sur les matrices $n \times n$ à n valeurs propres distinctes satisfait bien ce théorème.

Proposition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si A admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Démonstration.



- Pour savoir si une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est diagonalisable :
 - 1 Trouver $\text{Sp}(A)$ à l'aide du polynôme caractéristique $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
 - 2 Si on trouve n valeurs propres distinctes (donc $\text{MA}(\lambda) = 1$, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$), la réponse est oui.
 - 3 Sinon, pour chaque $\lambda \in \text{Sp}(A)$, on cherche $\text{MG}(\lambda) = \dim(\text{Ker}(A - \lambda I))$ (le plus simple étant de trouver une base de $\text{Ker}(A - \lambda I)$).
 - Si on trouve $\lambda \in \text{Sp}(A)$ tel que $\text{MG}(\lambda) < \text{MA}(\lambda)$, on peut s'arrêter. La réponse est non.
 - Si on trouve $\text{MG}(\lambda) = \text{MA}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$, la réponse est oui.

- Pour diagonaliser une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **lorsque c'est possible** :
 - 1 Trouver $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ à l'aide du polynôme caractéristique $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
 - 2 Pour chaque $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, trouver une base de $\text{Ker}(A - \lambda_i I)$.
 - 3 $A = PDP^{-1}$ où on place dans P les vecteurs propres constituant les bases des $\text{Ker}(A - \lambda_i I)$, et dans la diagonale de D , les λ_i associés.

Ce qui suit n'est **pas à utiliser comme justification dans un examen**, mais comme un moyen de vérification de vos calculs.

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. On appelle *trace* de A la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Théorème

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$. Alors :

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^r \text{MA}(\lambda_i) \times \lambda_i \quad \text{et} \quad \det(A) = \prod_{i=1}^r (\lambda_i)^{\text{MA}(\lambda_i)}.$$

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

1 Matrices semblables

2 Diagonalisation d'une matrice carrée

3 Valeurs et vecteurs propres complexes

Rappel 1 : Quel est l'effet géométrique de l'application linéaire dont la matrice est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ?$$

Pouvez-vous trouver un vecteur propre de A ?

→ C'est la matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Elle ne préserve la direction d'aucun vecteur de $\mathbb{R}^2$, donc on ne peut pas en trouver un vecteur propre (réel). Il est donc également impossible d'en trouver une valeur propre (réelle).

Rappel 2 : Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme $\det(A - \lambda I)$, qui est un polynôme de degré 2.

Question : Mis ensemble, ces deux énoncés semblent contredire un théorème d'un cours précédent. Lequel ?

Exemple

Selon le même procédé que pour les matrices à valeurs propres réelles, déterminer les valeurs propres de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et donner une base de chacun de ses sous-espaces propres.

Note : L'astuce utilisée pour échelonner $A - \lambda I$ dans cet exemple est très utile **pour les matrices 2×2** , y compris dans la recherche de vecteurs propres réels.

Proposition

Soient $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre **complexe** de A . Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ un vecteur propre associé à λ .

Alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A , associée au vecteur propre $\bar{\mathbf{x}}$.

Démonstration.



Question

Une matrice 3×3 peut-elle admettre 3 valeurs propres complexes ?

Rappel : si $A = PBP^{-1}$, alors les matrices A et B décrivent la même application linéaire, mais dans des bases différentes.

En fait, toute matrice admettant des valeurs propres complexes est semblable à une matrice de rotation. Le théorème suivant étudie ceci pour les matrices 2×2 .

Théorème

Soit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ admettant la valeur propre $\lambda = a - ib \in \mathbb{C}$ (avec $b \neq 0$). Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^2$ un vecteur propre associé à λ . Alors $A = PCP^{-1}$ où

$$P = [\operatorname{Re}(\mathbf{x}) \quad \operatorname{Im}(\mathbf{x})] \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Remarquer qu'en posant $\theta = \arg(\bar{\lambda})$, C est la matrice de rotation d'angle θ centrée en l'origine !

Exercices récapitulatifs

Dire des énoncés suivants s'ils sont vrais ou faux, et justifier.

- 1 Si deux matrices ont les mêmes valeurs propres, alors elles sont semblables.
- 2 Si A est semblable à B et B semblable à C alors A est semblable à C .
- 3 Toute matrice diagonalisable est inversible.
- 4 Si une matrice A est diagonalisable, alors A^2 l'est aussi.
- 5 Soit $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ diagonalisable mais dont l'unique valeur propre est 7, alors $A = 7I_3$.
- 6 Si A et B sont deux matrices diagonalisables de même taille, alors $A + B$ est aussi diagonalisable.
- 7 Toute matrice triangulaire est diagonalisable.
- 8 Une matrice diagonalisable peut ne pas être symétrique.

- 9 Si une matrice est diagonalisable et inversible, alors son inverse l'est aussi.
- 10 Une matrice ayant une seule valeur propre est nécessairement diagonalisable.
- 11 Les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont des vecteurs propres de toute matrices diagonale de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$.
- 12 L'ensemble des matrices diagonalisable de taille $n \times n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n \times n}$.
- 13 Soit $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mais ne possédant pas que des coefficients réels, alors ses valeurs propres ne peuvent pas être réelles.
- 14 Une matrice de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ non inversible ne peut pas avoir de valeur propre dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ❶ Déterminez les valeurs propres de A .
- ❷ La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifiez.
- ❸ Si A est diagonalisable, trouvez une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Soit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ une matrice inversible diagonalisable telle que

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

On suppose aussi que $A \neq I$ et $A \neq -I$.

- 1 Déduire la diagonalisation de A^{-1} dans cette même base.
- 2 La matrice $A^{-1} + A$ est-elle diagonalisable ? Si oui, donner la matrice diagonale associée en fonction de D .
- 3 Supposons que $A^{-1} - A = 0$. En diagonalisant cette équation, déduire une équation que doit vérifier λ_1 .
- 4 Si $\lambda_2 = -1$, en déduire la seule valeur possible pour λ_1 .

Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 1 La matrice A est-elle diagonalisable ?
- 2 Si A est diagonalisable, trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- 1** La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier en déterminant ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
- 2** Si A est diagonalisable, trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Soit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ une matrice diagonalisable telle que

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

avec P inversible. On s'intéresse à l'ensemble des matrices diagonalisables dans la même base de vecteurs propres que A .

Cet exercice a pour but de montrer que :

$$A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ diagonalisables dans la même base} \Leftrightarrow AB = BA$$

1 Soit B tel que $B = \tilde{P}\tilde{D}\tilde{P}^{-1}$. Montrer que $AB = BA$.

Soit maintenant une autre matrice B diagonalisable telle que $AB = BA$ et $B = \tilde{P}\tilde{D}\tilde{P}^{-1}$. Soit x un vecteur propre de A pour la valeur propre λ_1 .

2 Traitons le cas où $\lambda_1 = \lambda_2$. Montrer que dans ce cas, $A = \tilde{P}D\tilde{P}^{-1}$.

Supposons maintenant que $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

3 Que valent $\dim(\text{Ker}(A - \lambda_1 I))$ et $\dim(\text{Ker}(A - \lambda_2 I))$?

4 Montrer que si $\mathbf{x} \in \text{Ker}(B)$, alors $\mathbf{x}$ est un vecteur propre de B .

Supposons maintenant que $Bx \neq 0$.

- 5** Montrer que Bx est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ_1 . En remarquant que x et Bx appartiennent à $\text{Ker}(A - \lambda_1 I)$, montrer que x est un vecteur propre de B .