Équations linéaires, dépendance linéaire

Solution du cours #1

MT1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

Rappel : Objectifs du cours

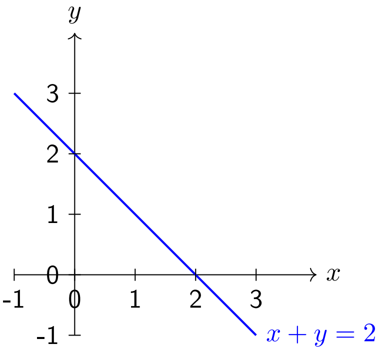
1. Passer d'un système d'équations à un système matriciel
2. Résoudre un système matriciel par l'algorithme du pivot de Gauss
3. Appréhender visuellement la résolution d'un système
4. Découvrir la notion d'indépendance linéaire

Thèmes du livre : 1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 1.7

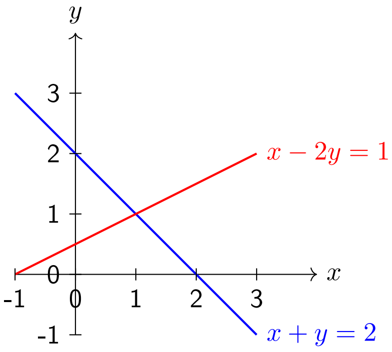
1) Tracer les droites et déduire le nombre de solutions du SEL suivant :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

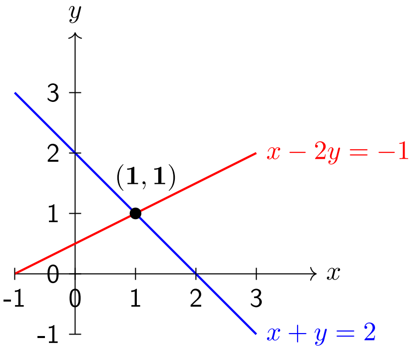
Traçons la première équation $x + y = 2$.



Traçons maintenant la deuxième équation $x - 2y = -1$.



Le point d'intersection des deux droites représente la solution du système.

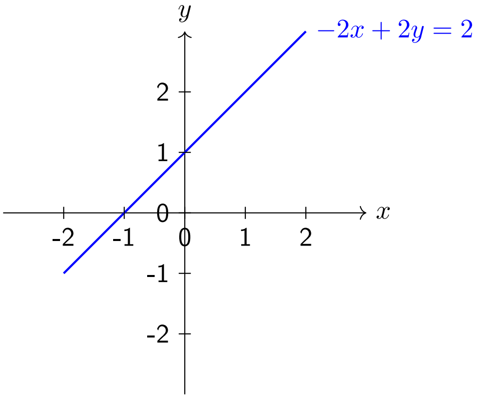


Conclusion : Le système admet une solution unique : $(x, y) = (1, 1)$.

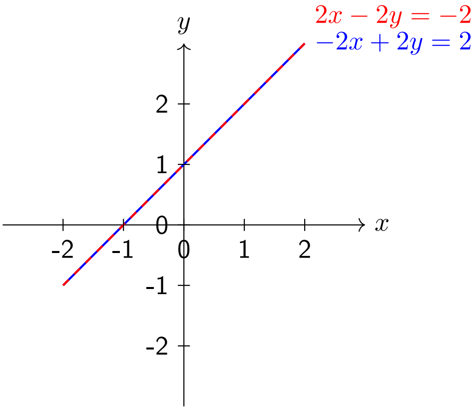
2) Tracer les droites et déduire le nombre de solutions du SEL suivant :

$$\begin{cases} -2x + 2y = 2 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases}$$

Traçons la première équation $-2x + 2y = 2$.



Traçons maintenant la deuxième équation $2x - 2y = -2$.



Conclusion graphique

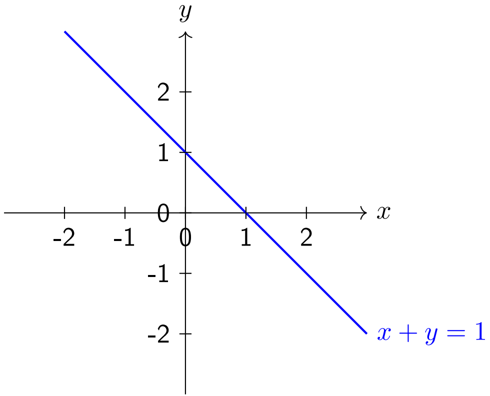
Les deux droites sont confondues, donc le système admet une infinité de solutions. Chaque point de la droite $y = x + 1$ est solution.

Conclusion : Il y a une infinité de solutions.

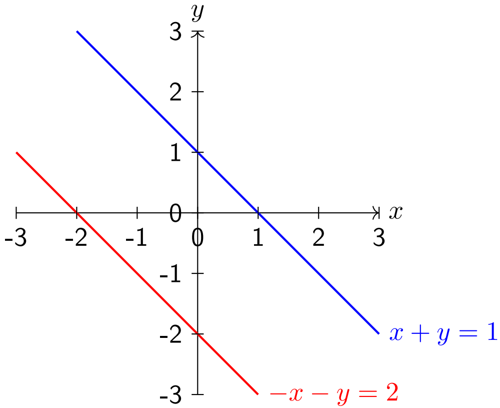
3) Tracer les droites et déduire le nombre de solutions du SEL suivant :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = 2 \end{cases}$$

Traçons la première équation $x + y = 1$.



Traçons maintenant la deuxième équation $-x - y = 2$.



Conclusion graphique

Les deux droites sont parallèles et ne se croisent jamais. Il n'existe donc aucune solution.

Conclusion : Le système n'a **aucune solution**.

Exercice 1 - Réduction de la matrice slide 28

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Système compatible :
Les solutions sont de la forme : $x_3 = t$, $x_2 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}t$, $x_1 = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}t$ avec $t \in \mathbb{R}$. Donc $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ convient.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \leftarrow -L_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & 3 \end{bmatrix}$$

Système compatible :

La solution unique est :

$$x_1 = -5, \quad x_2 = 3$$

Donc $(x_1, x_2) = (-5, 3)$ est solution.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Système incompatible :
La dernière équation donne $0 = 6$, ce qui est impossible.
Le système n'admet aucune solution.

1) Matrice augmentée du système homogène :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les solutions sont de la forme : $x_3 = t, \quad x_2 = -t, \quad x_1 = 2t, \quad t \in \mathbb{R}$ Une solution particulière est $(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 1)$.

Relation de dépendance linéaire :
La solution obtenue nous permet d'écrire la relation suivante (en remplace les variables de notre équation vectorielle par notre solution particulière) :

$$2\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} = \mathbf{0}$$

Développement :

$$2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-4+2\\4-5+1\\6-6+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Conclusion : Les vecteurs $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ et $\mathbf{v_3}$ sont **linéairement dépendants**.

a) Écriture sous forme vectorielle :

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

b) Écriture sous forme matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{A\,(3\times 3)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}\,(3\times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}\,(3\times 1)}$$

c) Matrice complète du système :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -8 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 8 & -4 \end{array}\right]$$

Exercice récapitulatif 3 - Partie 2 : Résolution du système

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -8 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 8 & -4 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \\ -1 & 0 & 8 & -4 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -8 & -8 \\ -1 & 0 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & 8 & -2 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{8} L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow \frac{1}{5} L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 8L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{-8} L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solution du système :

La solution est $(x_1, x_2, x_3) = (-4, 2, -1)$.

Exercice récapitulatif 3 - Vérification de la solution

Vérifions que la solution $(x_1, x_2, x_3) = (-4, 2, -1)$ **satisfait le système.**

Système initial :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \\ -x_1 + 8x_3 = -4 \end{cases}$$

Substitution de $(x_1, x_2, x_3) = (-4, 2, -1)$ **:**

1. $3x_1 + x_2 - 8x_3 = 3(-4) + 2 - 8(-1) = -12 + 2 + 8 = -2$
2. $x_1 + 3x_2 = -4 + 3 \times 2 = -4 + 6 = 2$
3. $-x_1 + 8x_3 = -(-4) + 8(-1) = 4 - 8 = -4$

Conclusion : La solution $(x_1, x_2, x_3) = (-4, 2, -1)$ satisfait bien toutes les équations du système. Elle est donc **correcte**.

Vecteurs considérés :

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_4} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a) Indépendance linéaire de $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$:
Dans la partie 2a, nous avons obtenu un pivot sur chaque ligne lors de la réduction de la matrice augmentée. Cela implique que la seule solution du système homogène est la solution triviale. La famille $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ est **libre**.

b) Indépendance linéaire de $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$:
Une famille de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ est nécessairement **liée** car $4 > 3$.

Exercice récapitulatif 3 - Partie 3c : Dépendance de $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_4}\}$

Résolvons le système homogène :

$$x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + x_3\mathbf{v_4} = \mathbf{0}$$

Matrice augmentée :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{8}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{8}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice récapitulatif 3 - Partie 3c : Conclusion

Conclusion de la résolution :
Le système est **compatible**, car la dernière ligne est nulle.

Paramétrons la solution :

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -t \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -t \end{cases}$$

Solution générale :

$$(x_1, x_2, x_3) = (-t, -t, t) = t(-1, -1, 1), \quad t \in \mathbb{R}$$

En prenant $t = 1$, nous obtenons la solution particulière : $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -1, 1)$ donc la famille est bien liée et $v_4 = v_1 + v_2$.