

# Orthogonalité et projections orthogonales

Solutions du cours #9

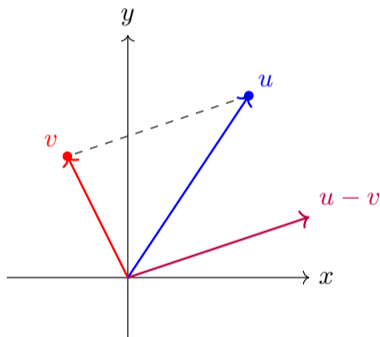
---



MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

$$\text{dist}(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{10}$$



Soit  $u$  et  $v$  deux vecteurs.

$$\begin{aligned} \text{dist}(u, v) = \text{dist}(u, -v) &\Leftrightarrow \|u - v\| = \|u - (-v)\| \Leftrightarrow \|u - v\|^2 = \|u + v\|^2 \\ &\Leftrightarrow (u - v) \cdot (u - v) = (u + v) \cdot (u + v) \\ &\Leftrightarrow u \cdot u - 2u \cdot v + v \cdot v = u \cdot u + 2u \cdot v + v \cdot v \\ &\Leftrightarrow 4u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u \cdot v = 0 \end{aligned}$$

Soit maintenant  $u$  et  $v$  tel que  $u \perp v$  c'est à dire que  $u \cdot v = 0$  :

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v) \cdot (u + v) = u \cdot u + 2u \cdot v + v \cdot v = u \cdot u + v \cdot v \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 \end{aligned}$$

## 1. Vérification de l'orthogonalité

Produit scalaire des vecteurs :

$$v_1 \cdot v_2 = 2 \times 0 + 0 \times (-4) + 0 \times 2 = 0$$

$$v_1 \cdot v_3 = 2 \times 0 + 0 \times 3 + 0 \times 6 = 0$$

$$v_2 \cdot v_3 = 0 \times 0 + (-4) \times 3 + 2 \times 6 = -12 + 12 = 0$$

La famille est orthogonale.

**2. Normalisation :**

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$u_3 = \frac{1}{\|v_3\|} v_3 = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Vérification de  $U^T U = I$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$
$$U^T U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$
$$= I$$

### 1.1 Vérification de l'orthogonalité

$$\begin{aligned}\langle w_1, w_2 \rangle &= (2 \times (-2)) + (5 \times 1) + (-1 \times 1) \\ &= -4 + 5 - 1 = 0\end{aligned}$$

$\{w_1, w_2\}$  est une base orthogonale de  $W$ .

1.2 Projection de  $y$  sur  $W$ 

$$\begin{aligned}\text{Proj}_{w_1}(y) &= \frac{\langle y, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 \\ &= \frac{2 + 10 - 3}{4 + 25 + 1} w_1 = \frac{9}{30} w_1 = \frac{3}{10} w_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Proj}_{w_2}(y) &= \frac{\langle y, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 \\ &= \frac{-2 + 2 + 3}{4 + 1 + 1} w_2 = \frac{3}{6} w_2 = \frac{1}{2} w_2\end{aligned}$$

$$\text{Proj}_W(y) = \text{Proj}_{w_1}(y) + \text{Proj}_{w_2}(y) = \frac{3}{10} w_1 + \frac{1}{2} w_2 = \begin{bmatrix} \frac{6}{10} & -1 \\ \frac{15}{10} & +\frac{1}{2} \\ \frac{-3}{10} & +\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{10} \\ \frac{15}{10} + \frac{5}{10} \\ \frac{-3}{10} + \frac{5}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 2 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

### 1.3 Décomposition de $y$

$$y = \text{Proj}_W(y) + z$$

Avec  $z = y - \text{Proj}_W(y)$ .

### 2. Projection d'un vecteur de $W$ sur $W$

Soit  $v \in W$ , alors il existe  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tel que  $v = c_1 w_1 + c_2 w_2$

$$\begin{aligned}\text{Proj}_U(v) &= \text{Proj}_W(c_1 w_1 + c_2 w_2) \\ &= (c_1 w_1 + c_2 w_2) \cdot \frac{w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 + (c_1 w_1 + c_2 w_2) \cdot \frac{w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 \\ &= c_1 w_1 + c_2 w_2 = v\end{aligned}$$

Le vecteur reste lui même ! Graphiquement le vecteur de  $W$  le plus proche de  $v \in W$  est lui même.

- 1. Vrai.** Par définition du complément orthogonal, on a toujours  $\dim(U) + \dim(U^\perp) = n$ , donc  $\dim(U^\perp) = n - \dim(U)$ .
- 2. Faux.** Une matrice symétrique vérifie  $A^T = A$ , mais cela n'implique pas que ses colonnes soient orthogonales entre elles. Par exemple,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  est symétrique mais ses colonnes ne sont pas orthogonales.

- 3. Vrai.** Soit  $V_1$  et  $V_2$  deux espaces orthogonaux, soit  $x \in V_1 \cap V_2$ , alors  $\langle x, x \rangle = 0$  donc  $x = 0$ .
- 4. Vrai.** Si  $A$  est symétrique, alors comme de manière générale  $\text{Ker } A^\top \perp \text{Im } A$  on a ici que  $\text{Ker } A \perp \text{Im } A$  car  $A^\top = A$ .

- 5. Faux.** L'égalité  $A^T A = I$  signifie que les colonnes de  $A$  sont orthonormées, mais  $A$  peut être rectangulaire (exemple :  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ).
- 6. Faux.** Deux sous-espaces orthogonaux dans  $\mathbb{R}^3$  s'intersectent trivialement en  $\{0\}$ .

**7. Faux.** Pour deux vecteurs de la base canonique, la distance est donnée par :

$$\text{dist } e_i e_j = \|e_i - e_j\| = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + 0^2 + \dots + 0^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 2$$

**8. Vrai.** Par l'inégalité triangulaire et l'orthonormalité, on a  $\|u - v\| \leq \|u\| + \| -v\| = 1 + 1 = 2$ .

9. **Faux.**  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  possède des colonnes normalisées mais n'est pas inversible.

10. **Vrai.**

$$\begin{aligned} y &= \text{Proj}_U(y) + z, \quad z \in U^\perp \\ \Rightarrow \|y\|^2 &= \|\text{Proj}_U(y)\|^2 + \|z\|^2 \\ \Rightarrow \|\text{Proj}_U(y)\|^2 &\leq \|y\|^2 \\ \Rightarrow \|\text{Proj}_U(y)\| &\leq \|y\| \end{aligned}$$

**1.a et 1.b** Comme  $x \in (V^\perp)^\perp$ , on sait que  $x$  est orthogonal à tous les vecteurs de  $V^\perp$  en particulier  $x_{V^\perp}$ , donc :

$$\begin{aligned}x \cdot x_{V^\perp} &= 0 \\ \Leftrightarrow x_V \cdot x_{V^\perp} + x_{V^\perp} \cdot x_{V^\perp} &= 0 \\ \Leftrightarrow \|x_{V^\perp}\|^2 = 0 &\Leftrightarrow x_{V^\perp} = 0\end{aligned}$$

**1.c** Comme  $x = x_V + x_{V^\perp}$  et que  $x_{V^\perp} = 0$ , on en déduit  $x = x_V \in V$ , donc  $(V^\perp)^\perp \subseteq V$ .

**2.a** Soit  $x \in V$  et  $v^\perp \in V^\perp$ , par définition de  $V^\perp$ , on a :

$$x \cdot v^\perp = 0.$$

Donc  $x$  est orthogonal à tous les vecteurs de  $V^\perp$ , ce qui signifie que  $x \in (V^\perp)^\perp$ .

**2.b** Comme cela est vrai pour tout  $x \in V$ , on a  $V \subseteq (V^\perp)^\perp$ .

**Conclusion** Comme on a montré  $(V^\perp)^\perp \subseteq V$  et  $V \subseteq (V^\perp)^\perp$ , on conclut :

$$(V^\perp)^\perp = V.$$

## Vérification de l'orthogonalité

$$v_1 \cdot v_2 = 2 \times 0 + 0 \times 4 + 0 \times 4 = 0$$

$$v_1 \cdot v_3 = 2 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times (-1) = 0$$

$$v_2 \cdot v_3 = 0 \times 0 + 4 \times 1 + 4 \times (-1) = 4 - 4 = 0$$

$$v_1 \cdot v_4 = 2 \times 3 + 0 \times 3 + 0 \times 1 = 6 \neq 0$$

⇒ La famille  $F_1$  n'est pas orthogonale car  $v_1 \cdot v_4 \neq 0$ .

**Choix de la base orthogonale**

Comme  $v_4$  n'est pas orthogonal aux autres, on le retire :

$$F_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

**Vérification :**

$$v_1 \cdot v_2 = 0, \quad v_1 \cdot v_3 = 0, \quad v_2 \cdot v_3 = 0.$$

$\Rightarrow F_2$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}^3$  car c'est une famille de 3 vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  qui est libre (car les vecteurs sont orthogonaux).

## Transformation en base orthonormée

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \frac{1}{\sqrt{32}} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$u_3 = \frac{1}{\|v_3\|} v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow B = \{u_1, u_2, u_3\}$  est une base orthonormée.

**Calcul de la projection**

$\{y_1, y_2\}$  forme bien une famille orthogonale (attention à bien toujours le vérifier!). On peut donc appliquer la formule de projection (on va appeler  $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ).

$$\begin{aligned}\text{Proj}_{\text{Vect}\{y_1, y_2\}}(y) &= \frac{y \cdot y_1}{y_1 \cdot y_1} y_1 + \frac{y \cdot y_2}{y_2 \cdot y_2} y_2 \\ &= \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{4} y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Logique ! Car  $y \in \text{Vect}\{y_1, y_2\}$

**Calcul de la projection**

$\{y_1, y_4\}$  ne forme pas une famille orthogonale (attention à bien toujours le vérifier!). On doit

donc d'abord effectuer GS dessus. (on va appeler  $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ).

$$u_1 = y_1 \quad \text{et} \quad u_4 = y_4 - \frac{y_4 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{6}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ainsi :}$$

$$\begin{aligned} \text{Proj}_{\text{Vect}\{y_1, y_4\}}(y) &= \text{Proj}_{\text{Vect}\{u_1, u_4\}}(y) = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{y \cdot u_4}{u_4 \cdot u_4} u_4 \\ &= \frac{1}{2} u_1 + \frac{4}{10} u_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \\ 0.4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**1.**  $V \perp W$  implique que  $\forall v \in V, \forall w \in W, v \cdot w = 0$

Donc comme :

$$v_i \in V, \quad w_j \in W \quad \text{on a} \quad v_i \cdot w_j = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, p\}.$$

**2.** La question 1 prouve directement que pour tout  $v \in \{v_1, \dots, v_n\}$  et  $w \in \{w_1, \dots, w_p\}$  on a  $v \perp w$  donc on a bien :

$$\{v_1, \dots, v_n\} \perp \{w_1, \dots, w_p\}$$

3. Comme  $V$  est engendré par la famille  $\{v_1, \dots, v_n\}$  et  $W$  engendré par la famille  $\{w_1, \dots, w_p\}$  on a directement que pour  $v \in V, w \in W$  on a :

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i, \quad w = \sum_{j=1}^p b_j w_j.$$

4.

$$\begin{aligned} v \cdot w &= \left( \sum_{i=1}^n a_i v_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^p b_j w_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_i b_j (v_i \cdot w_j) = 0. \end{aligned}$$

Car  $v_i \cdot w_j = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, p\}$ .

5. La question 4 prouve directement la définition de  $V \perp W$ .

1.

$$\begin{aligned} O^\top v_i &= [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^\top v_i \\ &= \begin{bmatrix} v_1^\top v_i \\ v_2^\top v_i \\ \vdots \\ v_n^\top v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_i. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} O^\top O &= [O^\top v_1 \ O^\top v_2 \ \dots \ O^\top v_n] \\ &= [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] = I. \end{aligned}$$

$O$  est orthogonale  $\Leftrightarrow O^\top O = I$ .

3.

$$\begin{aligned}H^{\top} H &= (I_n - 2vv^{\top})^{\top} (I_n - 2vv^{\top}) \\ &= (I_n - 2vv^{\top})(I_n - 2vv^{\top}) \\ &= I_n - 4vv^{\top} + 4vv^{\top}vv^{\top}.\end{aligned}$$

Or,  $\|v\| = 1 \Rightarrow v^{\top}v = 1$ , donc :

$$H^{\top} H = I_n - 4vv^{\top} + 4vv^{\top} = I_n.$$

$H$  est donc orthogonale.

4.

$$\begin{aligned}H^{\top} &= (I_n - 2vv^{\top})^{\top} = I_n - 2(vv^{\top})^{\top} \\ &= I_n - 2vv^{\top} = H.\end{aligned}$$

$H$  est donc symétrique.

5.  $A$  et  $B$  sont orthogonales et symétriques, donc :

$$(A + B)^\top = A^\top + B^\top = A + B.$$

$A + B$  est symétrique. Vérifions l'orthogonalité :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(A + B) \right)^\top \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(A + B) \right) &= \frac{1}{2}(A + B)(A + B) \\ &= \frac{1}{2}(A^2 + AB + BA + B^2). \end{aligned}$$

Comme  $A^2 = B^2 = I$  et  $AB = -BA$ , on a :

$$A^2 + B^2 + AB + BA = I + I + (-BA) + BA = 2I.$$

Ainsi :

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}}(A + B) \right)^\top \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(A + B) \right) = \frac{1}{2}2I = I \text{ donc } \frac{1}{\sqrt{2}}(A + B) \text{ est orthogonale}$$