

# Procédé de Gram-Schmidt, Méthode des moindres carrés

Solutions du cours #11

---



MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

$$\text{On a } y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = y_1$$

$$u_2 = y_2 - \frac{u_1 \cdot y_2}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = y_3 - \frac{u_1 \cdot y_3}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{u_2 \cdot y_3}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pour transformer la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  en famille orthonormée on calcule  $\left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|}\right)$  :

$$\frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Avec  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  on a :

$$Q = \left[ \begin{array}{c|c|c} \frac{u_1}{\|u_1\|} & \frac{u_2}{\|u_2\|} & \frac{u_3}{\|u_3\|} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{\sqrt{12}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Si  $A = QR$  alors  $Q^T A = Q^T QR = IR = R$ . Donc on peut récupérer  $R$  facilement :

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{\sqrt{12}} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

On cherche les solutions de l'équation normale  $A^\top Ax = A^\top b$  donc avec  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  et

$$b = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} :$$

$$\begin{aligned} A^\top Ax = A^\top b &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -24 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 12 & 8 & -24 \\ 8 & 10 & -2 \end{array} \right] \\ &\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de  $Ax = b$  au sens des moindres carrés est  $\left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

On cherche les solutions de l'équation normale  $A^T Ax = A^T b$  avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^T Ax = A^T b &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 14 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \end{array} \right] \\ &\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de  $Ax = b$  au sens des moindres carrés est :

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \right\}$$

Aussi si le système  $Ax = b$  est compatible, alors  $b \in \text{Im } A$  donc  $\hat{b} = \text{Proj}_{\text{Im } A}(b) = b$  donc l'ensemble des solutions au sens des moindres carrés de  $Ax = b$  est exactement l'ensemble des solutions de  $Ax = b$  :

$$Ax = b \Leftrightarrow Ax = \hat{b}$$

Si  $A$  est inversible alors :

$$(A^{\top} A)^{-1} A^{\top} b = A^{-1} (A^{\top})^{-1} A^{\top} b = A^{-1} b$$

1) Si  $b \in \text{Im } A$  alors comme  $\hat{b} = \text{Proj}_{\text{Im } A}(b) = b$  et comme  $A\hat{x} = \hat{b}$  on a que :

$$\|A\hat{x} - b\| = \|A\hat{x} - \hat{b}\| = 0$$

2) Par définition que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, e = \|A\hat{x} - b\| \leq \|Ax - b\|$$

Donc non.

1. Vrai, cette famille est liée : c'est 3 vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Vrai, si  $\{y_1\}$  est une base, alors effectuer GS dessus va la transformer en  $\{u_1\} = \{y_1\}$ . En toute famille ne contenant qu'un vecteur non nul est orthogonale.
3. Faux, car  $u_2 = y_2 - \frac{u_1 \cdot y_2}{u_1 \cdot u_1} u_1 = y_2$  ( $y_1$  et  $y_2$  sont déjà orthogonaux!) et
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$
 donc  $u_3$  ne serait pas orthogonal à  $u_2$ .
4. Vrai, avec  $A = I$  on a  $A = QR$  avec  $Q = R = I$ .
5. Faux, la matrice nulle n'est pas de plein rang colonne, on ne peut pas effectuer la décomposition de GS dessus.

6. Vrai,  $R$  est triangulaire inférieure et donc carrée.

7. Faux, si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est inversible alors  $\text{Im } A = \mathbb{R}^n$  ainsi  $\text{Proj}_{\text{Im } A}(b) = b$  donc :

$$Ax = \text{Proj}_{\text{Im } A}(b) \Leftrightarrow Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

Donc il n'y a qu'une solution.

8. Vrai, si  $Ax = b$  est compatible alors  $b \in \text{Im } A$  et donc  $\text{Proj}_{\text{Im } A}(b) = b$ , ainsi

$$Ax = b \Leftrightarrow Ax = \text{Proj}_{\text{Im } A}(b).$$

9. Vrai, l'ensemble des solutions au sens des moindres carrés de  $[a]x = [b]$  est l'ensemble des points  $x$  qui minimisent  $\|ax - \text{Proj}_{\text{Im}[a]}(b)\|$  or comme  $a \neq 0$  on a que  $\text{Im } A = \mathbb{R}$  et donc  $b \in \text{Im } A$ . Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation au sens des moindres carrés est l'ensemble des points qui minimisent  $\|ax - b\|$  et donc aussi

$p(x) = \|ax - b\|^2 = a^2x^2 - 2abx + b^2$ . Pour votre culture il n'y a qu'un point qui minimise  $p$  et c'est  $x = \frac{b}{a}$ .

**10.** Vrai, la réponse ici est assez poussée, si vous avez du mal à comprendre les concepts de ce cours, passez à la suite et intéressez-vous à la question seulement si vous avez le temps. Alors on s'intéresse aux solutions de  $Ax = \hat{b} = \text{Proj}_{\text{Im } A}(b)$ , comme  $\hat{b} \in \text{Im } A$  alors il existe  $y_p \in \mathbb{R}^n$  tel que  $Ay_p = \hat{b}$ , de plus comme  $A$  n'est pas inversible on a que  $\dim \text{Ker } A > 0$ , soit alors  $x_h \neq 0$  tel que  $x_h \in \text{Ker } A$ . On a que l'ensemble des vecteurs  $y_p + ty_h$  avec  $t \in \mathbb{R}$  vérifie  $A(y_p + ty_h) = Ay_p + tAy_h = Ay_p = \hat{b}$ , on a donc bien trouvé une infinité de solutions à l'équation.

**11.** Vrai, Si  $b \in \text{Ker}(A - I)$  alors  $Ab = b$  donc on a que  $\|Ab - b\| = 0$  donc  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\| \leq \|Ab - b\| = 0$ , or on a aussi que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|Ax - b\| \geq 0$  donc  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\| = 0$ .

1)  $\det A = 7 \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -7 \neq 0$  donc  $A$  est de plein rang colonne car inversible.

2) On effectue le procédé de GS sur  $y_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  et  $y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ .

$$u_1 = y_1 ; u_2 = y_2 - \frac{u_1 \cdot y_2}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{6}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = y_3 - \frac{y_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{y_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} - \frac{-7}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{7}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{7}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi avec  $Q = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{u_1}{\|u_1\|} & \frac{u_2}{\|u_2\|} & \frac{u_3}{\|u_3\|} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Et  $R = Q^T A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -3\sqrt{3} & -\frac{7}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{7}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

On a bien  $A = QR$

Avec  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  et  $b = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix}$  on cherche les solutions de l'équation normale  $A^\top Ax = A^\top b$  :

$$\begin{aligned} A^\top Ax = A^\top b &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 110 \\ 45 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 45 \\ -25 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{14} \\ \frac{25}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi pour la 5e année le prix du chocolat serait d'environ  $a \times 5 + b = \frac{75}{14} + \frac{175}{14} = \frac{250}{14} \approx 17.86$

Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $Q, R$  tel que  $A = QR$  est la décomposition QR de  $A$ .

- 1) Si  $x \in \text{Ker } R$  alors  $Rx = 0$  donc  $Ax = QRx = Q \times 0 = 0$  donc  $x \in \text{Ker } A$ . De plus comme  $QRx = 0$  on a que  $Rx \in \text{Ker } Q$ .
- 2) Si  $x \in \text{Ker } A$  alors  $Rx = Q^\top QRx = Q^\top Ax = Q^\top 0 = 0$  donc  $x \in \text{Ker } R$ .
- 3) Les colonnes de  $Q$  forment une famille orthonormée, donc elles sont linéairement indépendantes donc  $\text{Ker } Q = \{0\}$ .

- 1)  $\text{Im } A = \text{Vect} \{v_1, v_2\} = \text{Vect} \{v_1, \alpha v_1\} = \text{Vect} \{v_1\}$ . (les deux colonnes de  $A$  appartiennent à une même droite!)
- 2)  $\hat{b} = \text{Proj}_{\text{Im } A}(b) = \text{Proj}_{\text{Vect}\{v_1\}}(b) = \frac{b \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1$ .
- 3)  $\hat{b} \in \text{Im } A$  donc par définition de l'image il existe un vecteur  $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$  tel que  $A\hat{x} = \hat{b}$ .
- 4)  $(b - \hat{b}) \cdot v_1 = b \cdot v_1 - \frac{b \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 \cdot v_1 = b \cdot v_1 - b \cdot v_1 = 0$ . Comme  $v_2 = \alpha v_1$  on a que  $(b - \hat{b}) \cdot v_2 = \alpha(b - \hat{b}) \cdot v_1 = 0$ .
- 5)  $A^\top(b - \hat{b}) = 0 \Leftrightarrow A^\top b = A^\top \hat{b} \Leftrightarrow A^\top b = A^\top A \hat{x}$ .
- 6) Comme il existe  $\hat{x}$  tel que  $A^\top b = A^\top A \hat{x}$  on a par définition que  $A^\top b \in \text{Im } A^\top A$ .

7) En appliquant le résultat de la question 6 avec  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $\alpha = 2$  on a directement que l'équation normale est compatible. En réalité l'équation normale de tout système d'équations linéaire est compatible, le résultat de la question 6 n'est qu'un cas particulier. On a :

$$\begin{aligned} A^\top Ax = A^\top b &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation normale est :

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \right\}$$