

Propriétés des matrices symétriques

Solutions du cours #12



MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

Pour $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ on nous donne $\lambda_1 = 7$ de MA égale à 2 et $\lambda_2 = -2$ de MA égale à

1. Comme A est symétrique, on sait directement qu'elle est diagonalisable, et qu'en plus on peut choisir une base de vecteurs propres orthonormée, c'est ce qu'on va faire.

Pour λ_1 on cherche deux vecteurs propres orthogonaux. Le plan de travail est d'abord de trouver une base de vecteurs propres puis d'effectuer GS dessus.

$$A - 7I = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Par exemple $y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ forment une base du sous espace propre pour la valeur propre 7 de A .

On effectue GS sur ces deux vecteurs :

$$u_1 = y_1 \quad \text{et} \quad u_2 = y_2 - \frac{u_1 \cdot y_2}{u_1 \cdot u_1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

On les normalise et on obtient :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = -2$ c'est plus simple, il n'y a qu'un vecteur propre à trouver, à lui tout seul il forme une base orthogonale, on a donc qu'à le normaliser :

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ est bien un vecteur non nul du noyau de $A + 2I$. Donc on a $v_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Ainsi

$A = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ avec } P^T P = I.$$

On a que $Q(x) = x^\top Ax$ avec $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$, la première étape est de diagonaliser A dans une base orthogonale de vecteurs propres.

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(-5 - \lambda) - 16 = (3 - \lambda)(-7 - \lambda)$$

Pour $\lambda_1 = 3$ on a que $(A - 3I) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ et pour $\lambda_2 = -7$ on a que $(A + 7I) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$.

Ces deux vecteurs sont bien orthogonaux (c'était obligatoire!). Soit P la matrice dont les colonnes sont v_1 et v_2 normalisés. On effectue le changement de variable

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} P^\top x = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ et on a :}$$

$$Q(y) = y^\top \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} y = 3y_1^2 - 7y_2^2$$

Une astuce magique pour classer les matrices symétrique est de calculer les **mineurs principaux dominants** de la matrice A .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

On a $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$ et $\alpha_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -10$. Ensuite, si tous les $\alpha_i > 0$ alors la matrice est définie positive, si tous les $\beta_i = (-1)^i \alpha_i > 0$ alors A est définie négative.

Ici aucun des deux cas ne se présentent pour la matrice A en exemple, on ne peut pas statuer sur la nature de A avec cette méthode, il faut alors calculer ses v_p pour la classifier. En général, c'est le premier test rapide que vous devez faire, ça peut terminer l'exercice intantaneamente.

1. Faux, soit λ_i , pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ alors on a que la MG de λ_i est égale à 1, ainsi toute base de $\text{Ker}(A - \lambda_i I)$ s'écrit comme $\{c_i v_i\}$ avec $c_i \neq 0$ ainsi la famille $B = \{c_1 v_1, c_2 v_2, \dots, c_n v_n\}$ est la forme de toutes les bases possibles de vecteurs propres de A , toutes ces bases sont nécessairement orthogonales comme les SEP sont orthogonaux entre eux.
2. Vrai, avec $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est diagonalisable dans la base $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ qui n'est pas orthogonale et pourtant I est symétrique.
3. Vrai, comme A est symétrique, elle est automatiquement diagonalisable, donc la somme des MG de ses valeurs propres est égale à n .

4. Vrai! Soit v_3 un vecteur non nul orthogonal à v_1 et à v_2 (c'est possible d'en trouver un car une base de \mathbb{R}^3 contient 3 vecteurs) On peut alors écrire $A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^\top$ avec

$P = [v_1 \ v_2 \ v_3]$. Ainsi si $\{v_1, v_2, v_3\}$ ne forme pas une famille libre alors P^\top n'est pas inversible donc pour $x \neq 0$ tel que $P^\top x = 0$ on a $Ax = PDP^\top x = PD0 = 0$ donc $\text{Ker } A \neq \{0\}$ donc A non inversible. Si en revanche $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base, alors A est bien diagonalisable et possède 0 comme valeur propre, donc A n'est pas inversible non plus. Il existe une autre démonstration plus élégante mais j'attends qu'une personne curieuse me pose la question.

5. Faux, contre exemple : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
6. Faux, contre exemple avec $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$. Cependant c'est vrai pour une matrice symétrique et à coefficients réels.
7. Vrai, $A^\top A = I$ et $A^\top = A$ donc $I = A^\top A = A \times A = A^2$.
8. Faux, on a $Q(x) = x^\top \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$. Avec ce A on a $\det A = -1$ donc A est inversible, donc A ne possède pas 0 comme valeurs propre.
9. Faux, il y a un terme de degré 1 (le $+x_1$), or une forme quadratique ne possède que des termes de degrés 2 (de la forme $c_i x_i x_j$ avec c_i une constante quelconque).

- 10.** Vrai, toutes les valeurs propres de la matrice sont strictement positives donc il n'y en a aucune égale à 0, donc elle est inversible.
- 11.** Faux, les matrices peuvent être de taille différentes et donc la somme peut ne pas être définie. Si la taille des matrices était la même alors ça aurait été vrai, je vais faire la preuve pour votre culture. Soient A, B deux matrices définies négatives de même taille alors pour tout $x \neq 0$ on a que $x^\top Ax < 0$ et $x^\top Bx < 0$ donc $x^\top (A + B)x = x^\top Ax < 0 + x^\top Bx < 0$, donc $A + B$ est définie négative.
- 12.** Vrai, on a $A = PDP^\top$ avec D une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont strictement négatifs. Alors $A^2 = PD^2P^\top$ et D^2 est diagonale avec les termes diagonaux de D élevés au carré, donc tous strictement positifs.

1. A est symétrique donc automatiquement diagonalisable.

2.

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 3 - \lambda & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(3 - \lambda)(1 - \lambda) - 2(3 - \lambda) \\ &= (3 - \lambda)((2 - \lambda)(1 - \lambda) - 2) = (3 - \lambda)^2 \lambda\end{aligned}$$

Les deux valeurs propres de A sont 3 et 0. Plus qu'à trouver une base orthonormée de vecteurs propres de A .

Pour $\lambda_1 = 3$ on a :

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Deux vecteurs non colinéaires du noyau de $A - 3I$ peuvent être $y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Cette famille n'est pas orthogonale il faut donc effectuer GS dessus :

$$u_1 = y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u_2 = y_2 - \frac{u_1 \cdot y_2}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

On choisit $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Pour la valeurs propre 0 on remarque que $v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Ker } A$. Ainsi :

$A = PDP^T$ avec $P = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ et $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Attention les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont

bien normalisés ici !

1. On a $Q(x) = x^T Ax$ avec $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (comme par hasard c'est la matrice de l'exercice précédent).

2. Avec la diagonalisation en base orthonormée de l'exercice précédent on a $A = PDP^T$, si on pose $x = Py$ on a que $Q(y) = 3y_1^2 + 3y_2^2$. 3. A est semi définie positive car toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.