

Décomposition en valeurs singulières

Solutions du cours #13



MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

Pour faire la SVD de $A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{bmatrix}$:

1) Calculer une base orthonormée de $A^T A$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 8 & 10 & 4 \\ 10 & 17 & 14 \\ 4 & 14 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^T A - \lambda I) = (360 - \lambda)(90 - \lambda)(-\lambda)$$

Super, comme tous les SEP de A sont de dimension 1 on aura pas de GS à faire, il suffit de trouver un vecteur propre associé à chaque valeur propre puis de les normaliser.

$$v_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vérifiez quand même sur votre brouillon que ces vecteurs sont bien orthogonaux, aussi il faut que $\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 1$ et c'est bien le cas ici.

On a bien $A^T A v_1 = 360v_1$, $A^T A v_2 = 90v_2$, $A^T A v_3 = 0$

BINGO on a $V = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ et $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{360} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{90} & 0 \end{bmatrix} = \sqrt{10} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Astuce pour sigma : mettez dans la diagonale les **RACINES** des valeurs propres **NON NULLES** de $A^T A$, la matrice Σ doit avoir le même nombre de lignes et colonnes que A .

2) Trouver U .

U est une matrice carrée orthogonale de taille $m \times m$, ses r premières colonnes (avec $r = \text{rang}(A) \leq m$) sont les vecteurs Av_1 et Av_2 qu'on normalise, notez encore une fois qu'on ignore les vecteurs propres associés à des valeurs propres nulles, ici on ignore donc v_3 .

$$\frac{Av_1}{\|Av_1\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{Av_2}{\|Av_2\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Vérifiez que ces vecteurs sont bien orthogonaux, si ça n'est pas le cas alors vous avez fait une erreur de calcul avant !

Cette famille forme bien une base de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^2$ pas besoin de la compléter (on va devoir le faire pour la question suivante!).

$$\text{Donc } U = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

On a bien $A = U\Sigma V^T$.

On fait comme à la question précédente pour $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Astuce pour vous entraîner, le site

<https://www.emathhelp.net/calculators/linear-algebra/svd-calculator/> permet de calculer la SVD de matrice en expliquant bien les étapes.

$$B^T B = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{bmatrix}$$

On a que $\det(B^T B - \lambda I) = (18 - \lambda)(-\lambda)$.

On trouve :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Avec $B^\top Bv_1 = 18v_1$ et $B^\top Bv_2 = 0$.

Donc $V = [v_1 \ v_2]$ et $\Sigma = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ensuite on a $u_1 = \frac{Bv_1}{\sigma_1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Pour trouver les deux autres colonnes de U on a besoin de trouver deux vecteurs orthogonaux à u_1 et aussi orthogonaux entre eux, on cherche donc les solutions de :

$$\frac{1}{3}(x - 2y + 2z) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z = 0$$

On a que :

$$x - 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Bien que ces deux vecteurs sont orthogonaux à u_1 , il ne sont pas orthogonaux entre eux, il faut alors utiliser GS pour former une base orthogonale.

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Donc finalement avec $u_3 = \frac{\tilde{u}_3}{\|\tilde{u}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ on a :

$$B = U\Sigma V^\top$$

Avec $U = [u_1 \ u_2 \ u_3]$, $V = [v_1 \ v_2]$ et $\Sigma = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- 1. Faux** Bien au contraire, elles sont toujours positives ou nulles, ce sont les racines carrées des valeurs propres de $A^T A$. Ici on a besoin d'un contre exemple : la matrice I_2 ne possède que 1 en valeurs singulières.
- 2. Vrai** Comme toute matrices de taille $m \times n$ possède une SVD, en particulier si $n = m$ cela reste vrai.
- 3. Vrai** Cette question est surtout ici pour vous rappeler de ça pendant l'examen, vérifiez la pertinence de vos réponses et soyez critiques avec vous même !

- 4. Faux** Attention c'est un gros piège, ici ça n'est pas une diagonalisation, les éléments de Σ sont tous positifs ou nuls. Contre exemple : Une matrice diagonale $A = \text{diag}(-1, 2)$ a une SVD avec $\Sigma = \text{diag}(1, 2)$, donc $\Sigma \neq A$, et U, V ne sont pas l'identité.
- 5. Vrai** $A = 0$ implique $A^T A = 0$, donc toutes les valeurs propres sont nulles, donc toutes les valeurs singulières aussi.
- 6. Faux** Si A est réelle, alors $A^T A$ est réel symétrique, ses vecteurs propres sont réels, donc V aussi. Aussi $\text{Im } A$ est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^m , les colonnes de U sont bien des vecteurs réels.

7. Faux Une matrice 2×3 admet une SVD : par exemple $A = I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} I_3$. n'est pas carrée.

8. Faux V est une base **orthonormée** de vecteurs propres de $A^T A$, pas n'importe quelle base !
Exemple : on ne peut pas choisir des vecteurs non orthogonaux ou des vecteurs non unitaires.

On fait comme dans les exemples du cours pour $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 5 & -1 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$$

On trouve que $\det(A^T A - \lambda I) = (\lambda - 18)(\lambda - 2)$.

Valeurs propres : $\lambda_1 = 18$, $\lambda_2 = 2$

On trouve :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Avec $A^\top Av_1 = 18v_1$ et $A^\top Av_2 = 2v_2$.

$$\text{Donc } V = [v_1 \ v_2], \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ensuite } u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ et } u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solution exercice 2 récapitulatif

Il nous manque u_3 pour compléter une base orthonormée.

On cherche un vecteur orthogonal à u_1 et u_2 :

$$u_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

On cherche donc les solutions de :

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -2z \\ z = z \end{cases}$$

Donc :

$$u_3 \in \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow u_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finalement, on a :

$$U = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad A = U\Sigma V^T$$

1) Par construction : $u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$ pour $i \in \{1, \dots, r\}$

Donc :

$$AA^\top u_i = A \left(A^\top \frac{Av_i}{\sigma_i} \right) = A(\sigma_i v_i) = \sigma_i Av_i = \sigma_i^2 u_i$$

$\Rightarrow u_i$ est vecteur propre de AA^\top associé à la valeur propre σ_i^2

Or $\lambda_i = \sigma_i^2$ donc u_i est vecteur propre pour λ_i

2) Pour $i \in \{r + 1, \dots, m\}$, on a complété $U = [u_1 \cdots u_m]$ avec des vecteurs orthonormés $u_i \in \text{Ker}(A)$ car $\text{Ker}(A) = \text{Im}(A^\top)^\perp$

Donc :

$$Au_i = 0 \Rightarrow AA^\top u_i = A(0) = 0$$

Donc u_i est vecteur propre de AA^\top associé à la valeur propre 0

3) On a : $A = U\Sigma V^T$

Alors :

$$A^T = (U\Sigma V^T)^T = V\Sigma^T U^T$$

C'est donc aussi une SVD, avec matrices orthogonales V , U et matrice Σ^T (dimensions changées)

On peut donc faire toute la démarche en partant de AA^T pour obtenir les u_i (au lieu de $A^T A$ pour les v_i)