Calcul matriciel (1/2)

Solution du cours #2

MT1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

Rappel : Objectifs du cours

- de reconnaître certains types particuliers de matrices ;
- de manipuler les opérations matricielles de base (addition, multiplication, transposée) ;
- de définir et manipuler l'inverse d'une matrice carrée ;
- de justifier qu'une matrice carrée est inversible ou non ;
- de calculer l'inverse d'une matrice.

Thèmes du livre : 2.1, 2.2, 2.3

1) Calcul de $A + B$

Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

Calcul de $A + B$:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Calcul de $B + A$:

$$B + A = \begin{bmatrix} 5+1 & 6+2 \\ 7+3 & 8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Conclusion : $A + B = B + A$.

2) Calcul de $A - B$

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Calcul de $A - B$:

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 - (-1) & 4 - 0 \\ 1 - 5 & 3 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcul de $B - A$:

$$B - A = \begin{bmatrix} -1 - 2 & 0 - 4 \\ 5 - 1 & 2 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Conclusion : $A - B \neq B - A$.

3) Vérification de la règle d'or et calculs de AB et BA

Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Vérification de la règle d'or :

- A est de taille 2×3 et B de taille 3×2. - Le produit AB est défini et AB sera de taille 2×2.

Calcul de AB :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times 1 & 1 \times 0 + 2 \times 1 + 3 \times 0 \\ 4 \times 1 + 5 \times 0 + 6 \times 1 & 4 \times 0 + 5 \times 1 + 6 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

Calcul de BA

Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

B est de taille 3×2 et A de taille 2×3, donc BA est bien défini et sera de taille 3×3.

Calcul de BA :

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 4 & 1 \times 2 + 0 \times 5 & 1 \times 3 + 0 \times 6 \\ 0 \times 1 + 1 \times 4 & 0 \times 2 + 1 \times 5 & 0 \times 3 + 1 \times 6 \\ 1 \times 1 + 0 \times 4 & 1 \times 2 + 0 \times 5 & 1 \times 3 + 0 \times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1) Calcul de A^2 et A^3

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Calcul de $A^2 = A \times A$:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 1 \times 0 & 2 \times 1 + 1 \times 3 \\ 0 \times 2 + 3 \times 0 & 0 \times 1 + 3 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Calcul de $A^3 = A \times A^2$:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 4 + 1 \times 0 & 2 \times 5 + 1 \times 9 \\ 0 \times 4 + 3 \times 0 & 0 \times 5 + 3 \times 9 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$$

2) Calcul de A^T, A^TA et AA^T

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Tailles :

A est de taille 3×2 et A^T est de taille 2×3.

- A^TA est de taille $(2 \times 3) \times (3 \times 2) = (2 \times 2)$.
- AA^T est de taille $(3 \times 2) \times (2 \times 3) = (3 \times 3)$.

Calcul de A^TA :

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1^2 + 3^2 + 2^2 & 1 \times 2 + 3 \times 4 + 2 \times 0 \\ 2 \times 1 + 4 \times 3 + 0 \times 2 & 2^2 + 4^2 + 0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 16 & 20 \end{bmatrix}$$

Calcul de AA^T :

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 2 \\ 11 & 25 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

3) Vérifier que $BI = IB = B$

Soit $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ et $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Calcul de BI :

$$BI = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 0 & 2 \times 0 + 3 \times 1 \\ 4 \times 1 + 5 \times 0 & 4 \times 0 + 5 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = B$$

Calcul de IB :

$$IB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 0 \times 4 & 1 \times 3 + 0 \times 5 \\ 0 \times 2 + 1 \times 4 & 0 \times 3 + 1 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = B$$

Conclusion : $BI = IB = B$. L'identité matricielle est vérifiée.

Matrice : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

a) A est de taille 2×3 (non carrée), donc elle n'est **pas inversible**.

b)

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

AA^T est inversible car $(5 \times 10) - (3 \times 3) = 50 - 9 = 41 \neq 0$ et on a :

$$(AA^T)^{-1} = \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 10 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_2 \leftarrow L_2 - 10L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -18 & -3 & 1 & -5 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -18 & -3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_2 \leftarrow \frac{1}{-18}L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Ainsi $A^T A$ ne possèdant que deux pivots (et non 3), elle n'est pas inversible. Nous verrons plus tard une méthode plus rapide pour déterminer si une matrice est inversible ou non : **le déterminant**.

a)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 12 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 12 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{L_3 \leftarrow -L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 12 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right] \underset{\sim}{L_1 \leftarrow L_1 + 6L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 12 & 0 & 1 & 24 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{L_1 \leftarrow L_1 - 12L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

La matrice A est égale à son propre inverse.

b)
Montrons que :

$$(A - I_3)(A + I_3) = \mathbf{0}_3$$

$$(A - I_3)(A + I_3) = \begin{bmatrix} 0 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 12 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Il existe d'autres solutions comme par exemple la réponse à la prochaine question) *c)*

Soit $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vérifiant :

$$(B + I_n)(B - I_n) = \mathbf{0}_n$$

$$(B + I_n)(B - I_n) = B^2 - I_n = \mathbf{0}_n \quad \Longrightarrow \quad B^2 = I_n$$

Ainsi :

$$B \times B = I_n \quad \Leftrightarrow \quad B^{-1} = B$$

Conclusion : La matrice B est **inversible** et :

$$B^{-1} = B$$