Calcul matriciel (2/2): factorisation LU, blocs et déterminants

Solutions du cours #3

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

Exemple slide 6

Le découpage à retenir est le premier. Il permet de calculer :

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{bmatrix} A_{11}^2 + A_{12}A_{21} & A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ A_{21}A_{11} + A_{22}A_{21} & A_{21}A_{12} + A_{22}^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 7 & 18 & 0 & 0 \\ 6 & 19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 67 & 78 \\ 0 & 0 & 91 & 106 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Q1 : Décomposition en blocs 2×2

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, & A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, & B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Q2 : Transposée de A par blocs

$$A^\top = \begin{bmatrix} A_{11}^\top & A_{21}^\top \\ A_{12}^\top & A_{22}^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Q3 : Calcul de $A^\top B$

$$A^\top B = \begin{bmatrix} A_{11}^\top B_{11} + A_{21}^\top B_{21} & A_{11}^\top B_{12} + A_{21}^\top B_{22} \\ A_{12}^\top B_{11} + A_{22}^\top B_{21} & A_{12}^\top B_{12} + A_{22}^\top B_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{11}^\top B_{11} + A_{21}^\top B_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{11}^\top B_{12} + A_{21}^\top B_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}^\top B_{11} + A_{22}^\top B_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{12}^\top B_{12} + A_{22}^\top B_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^\top B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 & 6 \\ 10 & 1 & 7 & 8 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemple slide 11

A est une matrice 4×4 admettant 4 positions de pivot : elle est carrée et admet autant de positions de pivot que sa taille. Elle est donc inversible. L'exemple de la slide 10 a fourni la formule suivante pour une matrice triangulaire supérieure par blocs :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ \mathrm{O} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Un découpage de A en blocs 2×2 permet de calculer :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad A_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{20} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Exemple slide 11

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -A_{11}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} &= -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{20} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{30} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donc finalement :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{30} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{20} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

(Remarquez vous que l'inverse d'une matrice triangulaire est aussi triangulaire ?)

Exemple slide 20

On commence par échelonner A en laissant bien en évidence les opérations élémentaires effectuées.

$$A \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -7 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 8L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -47 \end{bmatrix} = U.$$

Exemple slide 20

Pour remplir L, on part de $L = I_3$ et on lit les opérations élémentaires effectuées :

- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donc on place un 2 en position $(2, 1)$.
- $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ donc on place un -1 en position $(3, 1)$.
- $L_3 \leftarrow L_3 + 8L_2$ donc on place un -8 en position $(3, 2)$.

D'où :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice slide 21

1. La matrice des coefficients de ce système est la matrice A de la slide 20, dont on a trouvé une factorisation LU. On l'utilise en deux étapes :
   - Étape 1 : on résout $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \\ -1 & -8 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Devient :

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ 2y_1 + y_2 = 8 \;\Rightarrow\; y_2 = 4 \\ -y_1 - 8y_2 + y_3 = 10 \;\Rightarrow\; y_3 = 44 \end{cases}$$

et donc :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 44 \end{bmatrix}.$$

- Étape 2 : on résout $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -47 & 44 \end{array}\right]$$

Devient

$$\begin{cases} -47x_3 = 44 \;\Rightarrow\; x_3 = -\frac{44}{47} \\ -x_2 - 7x_3 = 4 \;\Rightarrow\; x_2 = -4 - 7\left(-\frac{44}{47}\right) = \frac{120}{47} \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \;\Rightarrow\; 2x_1 + 5\left(\frac{120}{47}\right) + 2\left(-\frac{44}{47}\right) = 2 \;\Rightarrow\; x_1 = -\frac{209}{47} \end{cases}$$

La solution recherchée est donc

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{209}{47} \\ \frac{120}{47} \\ -\frac{44}{47} \end{bmatrix}.$$

2

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 4L_1 \end{cases}} \begin{bmatrix} \boxed{2} & -6 & 6 \\ 0 & \boxed{-7} & 5 \\ 0 & 14 & -10 \\ 0 & -14 & 10 \\ 0 & 21 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + 3L_2 \end{cases}} \begin{bmatrix} \boxed{2} & -6 & 6 \\ 0 & \boxed{-7} & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi on a $A = LU$ avec :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} \boxed{2} & -6 & 6 \\ 0 & \boxed{-7} & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice slide 30

1

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Développement du déterminant selon la 2^e ligne : $\det(A) = 0$

Conclusion : A n'est pas inversible car son déterminant est nul.

2. En retranchant 2 fois la première colonne de la deuxième colonne, on obtient :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5 \times (-2) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Solution slide 27 - Q1 et Q2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 1 \times 2 = \boxed{0}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot ((1)(3) - (1)(2)) = 2 \cdot 1 = \boxed{-2}$$

Solution slide 27 - Q3

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot (4 \times 0 - 4 \times 8) = \boxed{32}$$

Solution slide 27 - Q4

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times 2 \times 1 \times (-6) \times \frac{1}{3} = \boxed{-12}$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est le produit de ses termes diagonnaux.

Exercice récapitulatif 1

a) A est bien triangulaire, tous ses termes diagonnaux sont égaux à 1, ainsi $\det(A) = 1$

b)

$$AB = \begin{bmatrix} I & 0 \\ D & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ D \times I - I \times D & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

c) D'après la question précedente on remarque que :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D & I \end{bmatrix} = B$$

d)

$$AC = \begin{bmatrix} I & 0 \\ D & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & D \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & D \\ D & D^2 + I \end{bmatrix}$$

Exercice récapitulatif 2

a) La décomposition LU de A est donnée par

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -7 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) L et U étant triangulaires, leurs déterminants sont le produit de leurs termes diagonaux, donc $\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times (-1) \times 3 \times 5 \times 2 = -30$

a)

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3 \times 4 - 3 \times 1 = 9$$

b)

$$\det((A^T A)^{-1}) = \frac{1}{\det(A^T A)} = \frac{1}{\det(A)\det(A^T)} = \frac{1}{\det(A)\det(A)} = \frac{1}{81}$$