MTH1008 - Algèbre linéaire appliquée

Solutions du cours 4

– 1er février 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

On peut montrer que W_1 est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ de 3 façons différentes, plus ou moins simples.

Méthode 1 : la manière longue, mais qui fonctionne systématiquement. On va appliquer le schéma de preuve de la slide 15.

1. Montrons que $\mathbf{0}_3 \in W_1$. Puisque $0+0+0=0$, $\mathbf{0}_3 \in W_1$.
2. Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1$. Montrons que $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in W_1$.
   - $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1$ donc :
   $$u_1 + u_2 + u_3 = 0 \quad \text{et} \quad v_1 + v_2 + v_3 = 0. \tag{1}$$
   - $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$.
   - Or :
   $$\begin{aligned}(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3) &= (u_1+u_2+u_3)+(v_1+v_2+v_3)\\ &= 0+0 \text{ (grâce à (1))}\\ &= 0.\end{aligned}$$

   Donc $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in W_1$: W_1 est stable par addition.

3. Soient $\mathbf{u} \in W_1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - $\mathbf{u} \in W_1$ donc $u_1 + u_2 + u_3 = 0$.
   - $\alpha\mathbf{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$.
   - Or :

$$\begin{aligned}(\alpha u_1) + (\alpha u_2) + (\alpha u_3) &= \alpha(u_1 + u_2 + u_3) \\ &= \alpha \times 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

   Donc $\alpha\mathbf{u} \in W_1$: W_1 est stable par multiplication scalaire.

Finalement, W_1 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Méthode 2 : théorème de la slide 16.

L'équation définissant W_1 se réécrit :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -x_2 - x_3.$$

En prenant x_2 et x_3 comme inconnues non principales, toute solution de cette équation est de forme

$$x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{où } x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Ces solutions sont donc toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $(-1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$. Ainsi :

$$W_1 = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Puisque W_1 est un ensemble engendré par une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Méthode 3 : théorème de la slide 23.

W_1 est l'ensemble des solutions de l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Si on pose

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3},$$

on a donc : $W_1 = \mathrm{Ker}(A)$. Puisque W_1 est le noyau d'une matrice 1×3, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Note : *les méthodes 2 et 3 sont essentiellement équivalentes. Dans la méthode 2, on calcule en réalité une base de* $\mathrm{Ker}(A)$ *où* A *est la matrice donnée ci-dessus. Voir la méthode de calcul d'une base du noyau détaillée à la slide 34 : si on l'applique à* A*, on obtient bien la famille* $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$.

Ceci peut se prouver avec les 3 mêmes méthodes. Avec la méthode 2, on trouverait :

$$W_2 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Avec la méthode 3, on trouverait $W_2 = \mathrm{Ker}(A)$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. W_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet, $0+0+3\times 0 = 0 \neq 2$, donc $\mathbf{0}_3 \notin W_1$.
2. W_2 se réécrit comme $W_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$. En posant
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$
on trouve $W_2 = \operatorname{Ker}(A)$. Puisque W_2 est le noyau d'une matrice 2×3, c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
3. W_3 n'est pas stable par multiplication scalaire. En effet, soit $\mathbf{u} = (1,1,1) \in W_3$. En prenant $\alpha = -1$, on a : $\alpha\mathbf{u} = -\mathbf{u} = (-1,-1,-1) \notin W_3$. Donc W_3 n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
4. W_4 est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, donc l'élément neutre qui doit en faire partie est la matrice nulle $\mathrm{O}_{2,2}$. Mais en posant
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
on a : $ad - bc = 0 \neq 1$. Donc $\mathrm{O}_{2,2} \notin W_4$: W_4 n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Questions de compréhension :

1. Non. Si un ensemble W est un s.e.v. d'un espace vectoriel V, cela signifie d'abord que W est un *sous-ensemble* de V. Or $\mathbb{R}^2$ **n'est pas un sous-ensemble de** $\mathbb{R}^3$: ce sont deux ensembles totalement distincts. $\mathbb{R}^2$ serait un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ si ses éléments étaient des vecteurs à 3 composantes, ce qui n'est clairement pas le cas.
2. L'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n pourrait éventuellement être un s.e.v. de l'ensemble des matrices carrées de taille n. Or ce n'est pas le cas : l'élément neutre auquel on s'intéresse est la matrice nulle $\mathrm{O}_{n,n}$, qui n'est pas inversible.

Exemple slide 20

On cherche "simplement" l'ensemble des solutions de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow x_1 + x_2 = 0 \\ \leftarrow 0 = 0 \end{array}$$

De la première équation, on déduit $x_1 = -x_2$ et x_2 est une inconnue non principale. D'où :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(A) &= \left\{ x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

- $\mathrm{Im}(I) = \mathbb{R}^2$.
-
$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  $\mathrm{Im}(A)$ est l'espace engendré par les colonnes de A, et pour en trouver une famille génératrice, il suffit de retenir ses colonnes pivot :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

-
$$B = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \end{bmatrix}$$

  Donc

$$\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2.$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 2 & \boxed{2} & -1 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & -1 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1) Un vecteur non-nul de Im(A) : $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2) Base de Im(A) : $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

Solution slide 24 - Q3

Deux choix :

1. Soit on remarque que

$$Col_2(A) = 2(Col_1(A)+Col_3(A)) \Leftrightarrow 2Col_1(A)-Col_2(A)+2Col_3(A) = 0 \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

   Donc $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(A)$.

2. Soit on fait la méthode utilisée à la question suivante pour déterminer une base du noyau de A, et on répond par un élément non nul de cette base, par exemple ici $\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 2 & \boxed{2} & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ainsi $A \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow Ax = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases} \overset{x_3 \text{ libre}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Donc une base de $\mathrm{Ker}(A)$ est $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

Solution slide 24 - Q5

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée telle que $\mathrm{Ker}(M) = \{\mathbf{0}\}$.

Les colonnes de M sont linéairement indépendantes (car $\mathrm{Ker}(M) = \{\mathbf{0}\}$).

Une matrice carrée avec des colonnes linéairement indépendantes est inversible (théorème de caractérisation des matrices inversibles).

$\boxed{\text{Donc } M \text{ est inversible.}}$

Exercice récapitulatif 1

1. Vrai : $B\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(A) \iff B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Donc $AB\mathbf{x} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(AB)$.
2. Faux : la première composante de $(0,0)$ n'est pas strictement négative donc cet ensemble ne contient pas $\mathbf{0}_2$: ce n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.
3. Faux : par définition, l'ensemble vide ne contient aucun élément, en particulier pas le vecteur nul.
4. Vrai. En effet :
   1. $\mathbf{0}_n \in E$.
   2. Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + 1\mathbf{v}$ donc de la deuxième propriété avec $\alpha = 1$, on a : $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in E$.
   3. Soient $\mathbf{v} \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}_n + \alpha\mathbf{v} \in E$, d'après la deuxième propriété avec $\mathbf{u} = \mathbf{0}_n$.

   Note : lorsque l'on veut démontrer que $W \subseteq V$ est un s.e.v. de V, il est courant de réunir les points 2 et 3 du modèle présenté à la slide 15, en montrant directement que $\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \in W$ pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
5. Vrai : toutes les bases de $\mathrm{Ker}(A)$ ne contiennent qu'un seul vecteur de forme $k(1,1)$ où $k \in \mathbb{R}^*$. Ce sont aussi exactement les bases de $\mathrm{Im}(A)$.

$E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^3$, donc un espace vectoriel contenant E_1 et E_2 est $\mathbb{R}^3$.

Il y a deux méthodes, voici la première (la méthode astucieuse) :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = Bx\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax - Bx = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (A - B)x = 0\} = \mathrm{Ker}(A - B) \end{aligned}$$

donc E_1 est un EV inclus dans $\mathbb{R}^3$, c'est donc un SEV de $\mathbb{R}^3$.

La méthode 2 est plus conventionelle, pour prouver que $E_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ est un SEV, montrons les 3 propriétés :

- $0 \in E_1$: $A0 = B0 \implies 0 \in E_1$.
- $x, y \in E_1 \implies x + y \in E_1$:

  Soit $x, y \in E_1$, alors $A(x+y) = Ax + Ay = Bx + By = B(x+y)$ donc $x + y \in E_1$.

- $\lambda \in \mathbb{R}, x \in E_1 \implies \lambda x \in E_1$:

  Soit $x \in E_1, \lambda \in \mathbb{R},$ alors $A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(Bx) = B(\lambda x)$. donc $\lambda x \in E_1$

E_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Pour prouver que E_2 n'est pas un SEV :

- Prenons $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in E_2$ car $1^2 = 1$.
- Considérons $2x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$(2)^2 = 4 \neq 2 \quad \implies 2x \notin E_2.$$

Donc E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & -8 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -8 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftarrow -L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -8 \end{bmatrix}.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & -10 & -8 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} \end{bmatrix}.$$

Colonnes pivots : $\boxed{\text{1ère}}$, $\boxed{\text{2ème}}$, et $\boxed{\text{3ème colonnes}}$ Attention à bien prendre les colonnes de la matrices initiale.

$$\mathrm{Im}(A - B) = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} \right) = \mathbb{R}^3.$$

Reprenons le pivot de Gauss de la matrice $A-B$:

$$A-B \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{-3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(A-B) \Leftrightarrow (A-B)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$

$$\mathrm{Ker}(A-B) = \{0\} \quad \text{(Singleton nul).}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$Bx = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3. \end{cases} \Leftrightarrow x = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Donc une base de $\operatorname{Ker}(B) = Vect \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ et une base est $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

On remarque que :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $v_1 = v_2$, donc la famille n'est pas libre.

Conclusion : La famille ne forme pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Nous vous proposons deux méthodes, voici la première (la plus astucieuse) :

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Développement selon la 3ème colonne :

$$\det(C) = 0 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 7 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det(C) = 0 - 2 \cdot (3 - 0) + 7 \cdot (0 + 1) = -6 + 7 = 1.$$

$\det(C) \neq 0 \implies$ les colonnes de C forment une base de $\mathbb{R}^3$ car C est inversible.

Nous vous proposons une deuxième méthode, basée sur le pivot de Gauss :

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3} L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Les pivots sont présents dans chaque ligne, et il y a 3 pivots. Ainsi, les colonnes de C sont linéairement indépendantes.

Dans $\mathbb{R}^3$, une famille de 3 vecteurs linéairement indépendants forme une base.

Conclusion : Les colonnes de C forment une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{Ker}(\mathrm{O}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. = \{x \in \mathbb{R}^3\} = \mathbb{R}^3.$$