Espaces vectoriels (2/2): dimension, rang, changements de bases

Solutions du #5

MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

On a :

$$W_1 = \text{Vect}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\right\}.$$

Remarquons que :

$$\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

Donc, les deux vecteurs sont liés. Ainsi $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ engendre W_1 et forme une famille libre (c'est un vecteur non nul). Une base de W_1 est donc $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}$, la dimension est de 1.

On a :

$$W_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}.$$

$$x \in W_2 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \overset{x_2, x_3, x_4 \text{ libre}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \in Vect \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Solution slide 11 - Q2 suite

De plus cette famille est libre. Une base de W_2 est donc $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ et U est de dimension 3.

Solution slide 11 - Q3

Notons W_3 l'ensemble des matrices de taille 2×2 symétriques, alors :

$$\begin{aligned}
W_3 = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A = A^T\} &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\
&= Vect\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

De plus cette famille est libre. Une base de W_3 est donc $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ et sa dimension est 3.

Solution slide 11 - Q4

Comme W_4 est engendré par la famille de fonctions polynomiales $\{1+x, x+x^2\}$ il ne reste plus qu'à vérifier que cette famille est linéairement indépendante :
Soit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a(1+x)+b(x+x^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 & \text{en évaluant en x=0} \\ a+a+b+b=0 & \text{en évaluant en x=1} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

Ainsi $\{1+x, x+x^2\}$ forme une famille libre de $\mathbb{P}_2$, qui engendre W_4, c'est donc une base de W_4. La dimension de W_4 est donc 2.

On commence par échelonner notre matrice A :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_2 \end{cases}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La première et la seconde colonne de A son des colonnes pivots. A a donc 2 colonnes pivot et 1 colonne non pivot. Une base de $Im(A)$ pourrait être l'ensemble contenant ses deux premières colonnes : $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, la dimension de $Im(A)$ est 2.

Pour déterminer une base de $Lgn(A)$ il suffit de prendre les lignes de la matrice échelonnées dans lequelles il y a un pivot après avoir effectué le pivot de Gauss. Une base de $Lgn(A)$ est donc $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ et la dimension de $Lgn(A)$ est 2.

Pour trouver une base du noyau de A il faut continuer notre pivot de Gauss afin de réduire la matrice (que nous avons déjà échelloné).

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2} L_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \end{cases}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous avons maintenant la matrice échelonnée réduite. Passons à la résolution de $Ax = 0$.

$$Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{x_3 \text{ libre}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -3x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \in \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ainsi, une base de $\mathrm{Ker}(A)$ est

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

et la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$ est donc 1.

1) Soit $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ avec $dim(Ker(A)) = 3$, par théorème du rang on a que :

$$\begin{aligned} n = rang(A) + dim(Ker(A)) &\Leftrightarrow 5 = rang(A) + 3 \\ &\Leftrightarrow rang(A) = 5 - 3 = 2 \end{aligned}$$

2) Si $A \in \mathbb{R}^{6\times 9}$ et $\dim \mathrm{Ker}\, A = 2$ alors on aurait :

$$\text{rang}(A) = 9 - \dim \mathrm{Ker}\, A = 9 - 2 = 7$$

Ce qui est impossible car rang$(A) \leq \min(6, 9) = 6$.
3) La dimension du noyau de A est son nombre de colonnes non pivot, donc 1.

Solution slide 20 - Matrice nulle

On considère la matrice $0_{4\times 4}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le rang de A est 0, car toutes ses colonnes sont nulles. La dimension du noyau est donnée par :

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 4 - \mathsf{rang}(A) = 4 - 0 = 4.$$

Une base de $\mathrm{Ker}(A)$ est donc la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

L'image de A ne contient que $\mathbf{0}$, donc une base de $Im(A)$ est $\emptyset$ (on peut dire aussi que $Im(A)$ n'a pas de base).

Solution slide 20 - Matrice 4×2

Considérons la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Effectuons un pivot de Gauss :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les colonnes pivots sont la 1ère et la 2ème, donc $\text{rang}(A) = 2$.
Par le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2 - \text{rang}(A) = 2 - 2 = 0.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$, une matrice de taille 4×2 peut avoir un noyau réduit à $\{0\}$.

Soit $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$, les colonnes de A sont donc des vecteurs de $\mathbb{R}^2$, ainsi $Im(A) \subseteq \mathbb{R}^2$, et donc $rang(A) \leq 2$. Aussi avec le théorème du rang on a :

$$\begin{aligned} n = rang(A) + dim(Ker(A)) &\Leftrightarrow 4 - dim(Ker(A)) = rang(A) \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 4 - 2 \leq dim(Ker(A)) \\ &\Leftrightarrow 0 < 2 \leq dim(Ker(A)) \end{aligned}$$

Ainsi la dimension du noyau de A est de au moins 2, elle ne peut être égale à 0, donc $Ker(A) \neq \{0\}$.

Solution slide 20 - Indépendance et noyau

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice dont on peut définir les colonnes par bloc :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \text{ indépendante linéairement } &\overset{\text{D'après le cours}}{\Leftrightarrow} \left(A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}\right) \\
&\Leftrightarrow \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\right\} = \{\vec{0}\} \\
&\Leftrightarrow Ker(A) = \{\vec{0}\} \\
&\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker}(A) = 0
\end{aligned}$$

Solution slide 20 - Matrice "Attila"

Pour votre culture, une matrice carrée $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ne contenant que des 1 est parfois appellée matrice "attila" en référence à Attila (395-453), roi des Huns (M est une matrices avec que des "uns", qu'ils sont drôles ces mathématiciens !).

Ici on s'intéresse à une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ qui ne contient que des 1 (mais qui n'est pas forcément carrée). Toutes les colonnes de A étant les mêmes, une base de $Im(A)$ peut être alors l'ensemble contenant uniquement sa première colonne, son rang est donc 1, aussi par théorème du rang on peut en déduire que la dimension de son noyau est $n - 1$.

Non. Quelque soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, le vecteur nul $\vec{\mathbf{0}}$ est solution de $A\vec{x} = \vec{\mathbf{0}}$. Ainsi $\vec{\mathbf{0}}$ est commun au noyau de toutes les matrices. Heureusement, car d'aprèse le cours $ker(A)$ est un espace vectoriel.

Soit $B = \left\{ b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ et $C = \left\{ c_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$.

1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ et $\begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 17 \neq 0$ donc B et C sont bien des bases de $\mathbb{R}^2$.

2) On résout le système $P_{\mathcal{E}\leftarrow B} x = \begin{bmatrix} 3 \\ -10 \end{bmatrix}$ on trouve $x = \left[\begin{bmatrix} 3 \\ -10 \end{bmatrix} \right]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$.

3) Pour l'obtenir on effectue une sorte de pivot de Gauss Jordan mais avec cette matrice :
$[P_{\mathcal{E}\leftarrow C} | P_{\mathcal{E}\leftarrow B}]$ on obtient $P_{C\leftarrow B} = P_{\mathcal{E}\leftarrow C}^{-1} P_{\mathcal{E}\leftarrow B} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -11 & 12 \\ 12 & -10 \end{bmatrix}$.

4) $y = [y]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\leftarrow C} [y]_C = P_{\mathcal{E}\leftarrow C} x = \begin{bmatrix} 29 \\ -43 \end{bmatrix}$.

On commence par échelonner la matrice T :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les colonnes pivots sont la 1ère et la 3ème, donc $\text{rang}(T) = 2$.
Une base de $Im(T)$ est constituée des colonnes pivots de la matrice originale :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Solution exercice récapitulatif - Q2

On commence par échelonner la matrice N :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}\right.} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les colonnes pivots sont la 1ère, 2ème et 3ème, donc rang$(N) = 3$.
Une base de $Im(N)$ est constituée des colonnes pivots de la matrice originale :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

On a déterminé qu'une base de $Im(T)$ est :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$, il faut compléter cette base avec un vecteur qui n'est pas une combinaison linéaire des deux précédents. Un choix possible est $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Car $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ possède 3 pivots.

Ainsi, une base de $\mathbb{R}^3$ est $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

Solution exercice récapitulatif - Q4

On a :

$$\mathsf{Lgn}(N) = \mathsf{Vect}\{L_1, L_2, L_3, L_4\}.$$

On reprend la matrice échelonnée de N :

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les lignes avec des pivots forment une base :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ainsi, $\dim(\mathsf{Lgn}(N)) = 3$.

On commence par échelonner la matrice A :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\{ L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\{ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 2 \end{bmatrix}$$

Les colonnes pivots sont la 1ère et la 2ème, donc rang(A) = 2.
Une base de Im(A) est constituée des colonnes pivots de la matrice originale :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

On commence par échelonner et réduire la matrice A :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\left\{ L_1 \leftrightarrow L_2 \right.} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\left\{ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \right.} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\left\{ L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \right.} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\left\{ L_1 \leftarrow L_1 - L_1 \times 1 \right.} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Nous avons maintenant la matrice échelonnée réduite. Passons à la résolution de $Ax = 0$.

$$Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{x_3 \text{ libre}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \in \text{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ainsi, une base de $\mathrm{Ker}(A)$ est

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

et la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$ est donc 1.

Solution exercice récapitulatif - Q7

Le théorème du rang affirme que :

$$\dim(\mathsf{Im}(A)) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n.$$

On a trouvé :

$$\dim(\mathsf{Im}(A)) = 2, \quad \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1.$$

Or, A est de taille 2×3, donc $n = 3$.

$$2 + 1 = 3.$$

Le théorème du rang est bien vérifié, nous n'avons pas cassé les mathématiques.

Solution exercice récapitulatif - Q8

On a :

$$B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$$

Si A est de taille $m \times n$, alors B est obtenu en juxtaposant deux copies de A côte à côte.
Ainsi, la taille de B est :

$$B \in \mathbb{R}^{m \times 2n}.$$

On effectue un pivot de Gauss sur B^T :

$$B^T = \begin{bmatrix} A^T \\ A^T \end{bmatrix}$$

On soustrait la deuxième ligne de blocs par la première :

$$\underset{\{ L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix} A^T \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le nombre de pivots est celui de A^T, soit rang(A).
Or, on sait que :

$$\text{rang}(B) = \text{rang}(B^T).$$

Conclusion : rang(B) = rang(A).

On applique le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(B)) = \mathsf{dim}(B) - \mathsf{rang}(B).$$

On a :

$$\dim(B) = 2n, \quad \mathsf{rang}(B) = \mathsf{rang}(A).$$

Donc :

$$\dim(\mathrm{Ker}(B)) = 2n - \mathsf{rang}(A).$$

Solution exercice récapitulatif - Q11

Comme $P_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} [b_1]_C & [b_2]_C & [b_2]_C \end{bmatrix}$, nous connaisons les vecteurs de la base B, le problème c'est qu'ils sont exprimés dans la base C et on aimerait qu'ils soient exprimés dans la base que nous comprennons : $\mathcal{E}_3$, mais on a une formule pour s'en sortir.

$$\begin{cases} b_1 = P_{\mathcal{E}_3 \leftarrow C}[b_1]_C \\ b_2 = P_{\mathcal{E}_3 \leftarrow C}[b_2]_C \\ b_3 = P_{\mathcal{E}_3 \leftarrow C}[b_3]_C \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} P_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 5 & 13 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

On a que :

$$x = P_{\mathcal{E}_3 \leftarrow C}[x]_C$$

L'inconue est bien $[x]_C$ ici, il faut donc résoudre le système :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \tag{1}$$

Solution exercice récapitulatif - Q12

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \overset{\{ L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \overset{\{ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\{ L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -1 \end{array}\right] \overset{\{ L_3 \leftarrow L_3 + 5L2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{6} & 4 \end{array}\right]$$

$$\overset{\{ L_3 \leftrightarrow \frac{1}{6} L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \overset{\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L3 \end{array}\right.}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Continuons notre pivot :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \overset{\{ L_1 \leftarrow L_1 - 3L2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Ainsi on a $[x]_C = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$