Nombres complexes

Solutions du cours #7

MTH1008 – Hiver 2026

Sacha Benarroch-Lelong, Théo Denorme (librement inspiré du travail de Sébastien Le Digabel)

Correction exercice 1

1. Vrai. Si $z = \mathrm{Re}(z)$, alors $\mathrm{Im}(z) = 0$, donc $z \in \mathbb{R}$.

2. Vrai. Si $z = x + iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, qui est toujours positif ou nul.

3. Vrai. Soit $z \in \mathbb{C}$ solution de $z^n = 1$, alors $(z^n)^2 = 1$ donc $z^{2n} = 1$ donc z est bien solution de $z^{2n} = 1$ aussi.

4. Faux. L'argument d'un nombre complexe est défini modulo 2π, il n'est donc pas unique. Exemple : $\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Par convention on a tendance à faire à le prendre dans $]-\pi, \pi]$.

5. Faux. En général, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (inégalité triangulaire). Contre-exemple : $z_1 = 1, z_2 = -1$ donne $|z_1 + z_2| = 0 \neq |z_1| + |z_2| = 2$.

6. Vrai. Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, alors $\left(-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = z$. Comme $z \neq 0$: $\sqrt{r} \neq -\sqrt{r}$ ce qui implique que ces deux racines sont bien distinctes.

7. Faux. e^z est en général un nombre complexe. Contre-exemple : $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ qui n'est pas réel.

8. Faux. $B = \frac{1}{2}(A^\top + A)$ est symétrique mais pas nécessairement hermitienne.
Contre-exemple : $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$ donne $B = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$, qui n'est pas hermitienne (car ses termes diagonaux n sont pas des réels par exemple).

9. Vrai. $B^* = (\frac{1}{2}(A^* + A))^* = (\frac{1}{2}((A^*)^* + A^*) = \frac{1}{2}(A + A^*) = \frac{1}{2}(A^* + A) = B$.

10. Faux. En général, $\mathrm{Re}(z_1 z_2) \neq \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2)$. Contre-exemple : $z_1 = i, z_2 = i$ donne $\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(-1) = -1$, mais $\mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2) = 0 \times 0 = 0$.

1. Formes exponentielles de z_1 et z_2

On utilise la relation $z = re^{i\theta}$ avec :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta \text{ tel que } \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r}.$$

Pour $z_1 = 1 + i$:

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

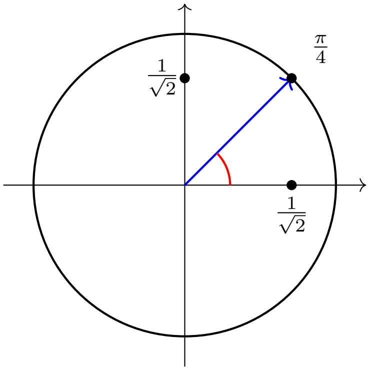
L'angle θ_1 vérifie :

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, et :

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(\cos(\pi/4)) + i\sin(\pi/4)).$$

Illustration de l'angle θ_1



Correction exercice 2 (suite)

Pour $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$:

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

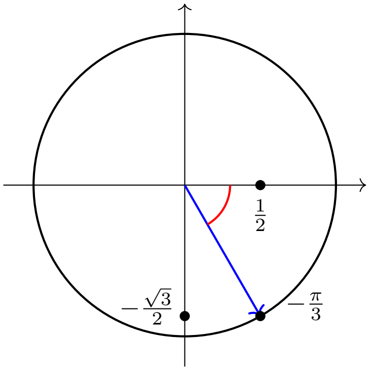
L'angle θ_2 vérifie :

$$\cos\theta_2 = \frac{1}{2}, \quad \sin\theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc $\theta_2 = -\frac{\pi}{3}$, et :

$$z_2 = 2e^{-i\pi/3} = 2(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)).$$

Illustration de l'angle θ_2



Correction exercice 2 (suite)

2. Produit sous forme exponentielle et polaire

En utilisant la propriété multiplicative :

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

On calcule :

$$|z_1 z_2| = (\sqrt{2} \times 2) = 2\sqrt{2}.$$

L'angle total est :

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} = -\frac{\pi}{12}.$$

Ainsi :

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/12}.$$

Sous forme polaire :

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}(\cos(-\pi/12) + i\sin(-\pi/12)).$$

1. Soit $z = x + iy \neq 0$, avec $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = x$ alors $z = x + ix$ et $\bar{z} = x - ix$.

$$\begin{aligned}\frac{z}{\bar{z}} = \frac{x + ix}{x - ix} = \frac{(x + ix)(x + ix)}{(x - ix)(x + ix)} &= \frac{x^2 + 2ix^2 - x^2}{x^2 - i^2x^2} \\ = \frac{2ix^2}{x^2 + x^2} = \frac{2ix^2}{2x^2} = i.\end{aligned}$$

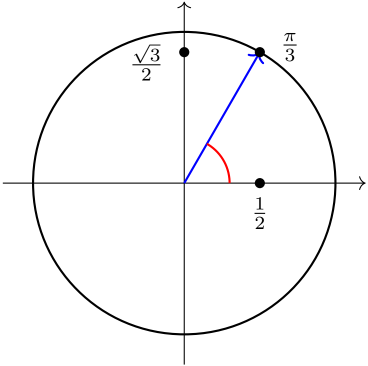
2. $x > 0$, donc

$$|z| = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2}x, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{2}x}, \quad \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{2}x},$$
$$\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad z = |z|e^{i\theta} = \sqrt{2}xe^{i\pi/4}.$$

1. Forme exponentielle de z_1

$$\begin{aligned}|z_1| &= \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4,\\ \cos\theta &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2},\\ \theta &= \frac{\pi}{3}, \quad z_1 = 4e^{i\pi/3}.\end{aligned}$$

Illustration de l'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$



2. Calcul de z_1^3 avec la formule De Moivre

$$\begin{aligned} z_1^3 &= (4e^{i\pi/3})^3 = 4^3 e^{i3(\pi/3)}, \\ &= 64e^{i\pi}, \\ &= 64(-1) = -64. \end{aligned}$$

3. Racines cubiques de z_1

$$z_k = \sqrt[3]{4}e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3})}, \quad k = 0, 1, 2.$$

$$z_0 = \sqrt[3]{4}e^{i\pi/9}, \quad z_1 = \sqrt[3]{4}e^{i(7\pi/9)}, \quad z_2 = \sqrt[3]{4}e^{i(13\pi/9)}.$$

1. Montrons que $p(\bar{z}) = 0$

$$p(z) = a + bz + cz^2 = 0.$$

En prenant le conjugué : $\overline{p(z)} = \overline{a + bz + cz^2 + dz^3} = \bar{a} + \bar{b}\bar{z} + \bar{c}\bar{z}^2 + \bar{d}\bar{z}^3.$

Or, $a, b, c, d \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{a} = a, \quad \bar{b} = b, \quad \bar{c} = c.$

Donc $p(\bar{z}) = a + b\bar{z} + c\bar{z}^2 + d\bar{z}^3 = 0.$

2. Montrons que $z_0 \in \mathbb{R}$ si $\bar{z_0} = z_0$

$$\text{Soit } z_0 = a + ib, \quad \bar{z_0} = a - ib.$$
$$\text{Si } \bar{z_0} = z_0, \text{ alors } a + ib = a - ib.$$
$$\text{On en déduit } ib = -ib \Rightarrow 2ib = 0 \Rightarrow b = 0.$$
$$\text{Donc } z_0 = a \in \mathbb{R}.$$

3. Le polynôme p est de degré 3, par le théorème fondamental de l'algèbre il possède 3 racines complexes.

4. Montrons que $r \in \mathbb{R}$ par l'absurde

Supposons que $r \notin \mathbb{R},$ alors $\bar{r} \neq r$.

Or, comme p a des coefficients réels, si r est racine, alors $\bar{r}$ l'est aussi.

On aurait donc les racines $z, \bar{z}, r, \bar{r}$ distinctes.

Mais p est un polynôme de degré 3, donc il ne peut avoir que 3 racines distinctes.

Contradiction, donc notre hypothèse était fausse, et on a nécessairement $\bar{r} = r$.

Ainsi, $r \in \mathbb{R}$.

1. Montrons que $B = A^*A$ est hermitienne

$$B^* = (A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A = B.$$

$B^* = B \Rightarrow B$ est hermitienne.

2. Montrons que $\overline{B} = B^\top$, on utilise le fait que B est hermitienne.

$$\overline{B} = \overline{B^*} = \overline{\overline{B^\top}} = B^\top.$$

3. Montrons que $B^\top + B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\overline{(B^\top + B)} = \overline{B^\top} + \overline{B} = B + B^\top.$$

$$\text{Or, } \overline{M} = M \Rightarrow M \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

$$\Rightarrow B^\top + B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$