

Valeurs propres et vecteurs propres

Solutions du cours #8



MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

1.

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(6) + 6(-5) \\ 5(6) + 2(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 30 \\ 30 - 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = -4u.$$

Donc u est un vecteur propre de A pour la valeur propre -4 .

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(3) + 6(-2) \\ 5(3) + 2(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 12 \\ 15 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Av n'est pas colinéaire à v donc v n'est pas un vecteur propre de A .

2.

$$\det(A - 7I) = \begin{vmatrix} 1-7 & 6 \\ 5 & 2-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = (-6)(-5) - (6)(5) = 30 - 30 = 0.$$

7 est une valeur propre de A .

Pour trouver les vecteurs propres de A pour la valeur propre 7 on résoud :

$$(A - 7I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$-6x + 6y = 0 \Rightarrow x = y.$$

Solution : $\mathbf{w} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}^$. Remarque : On aurait pu tenter de résoudre le système sans passer par le déterminant, si l'unique solution de $A - 7I = 0$ avait été le vecteur nul 0, alors on aurait pu conclure que 7 n'est pas une valeur propre de A .*

On a déjà vu que $\text{Ker}(A - 7I) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ Donc le sous espace propre associé à 7 est $\text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Aussi on sait que $\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre -4 donc on sait que $\text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \right) \subseteq \text{Ker}(A - (-4)I)$. De plus on sait que $\dim(\text{Ker}(A - (-4)I)) \neq 0$ car $\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \in \text{Ker}(A - (-4)I)$ et $\dim(\text{Ker}(A - (-4)I)) \neq 2$ car sinon on aurait $A - (-4)I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ainsi $\dim(\text{Ker}(A - (-4)I)) = 1$ donc $\text{Ker}(A - (-4)I) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \right)$, le SEP associé à -4 pour A est $\text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \right)$

1. Déterminons les vecteurs propres pour $\lambda = 5$

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 4 - 5 & 1 \\ 2 & 3 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Réolvons $(A - 5I)\mathbf{X} = 0$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$-x + y = 0 \Rightarrow x = y$. Vecteurs propres : $\mathbf{v}_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Une base du SEP de A pour

la vp 5 est $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

2. Déterminons les vecteurs propres pour $\lambda = 2$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Réolvons $(A - 2I)\mathbf{X} = 0$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$. Vecteurs propres : $\mathbf{v}_2 = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\beta \in \mathbb{R}^*$. Une base du SEP de A

pour la vp 2 est $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

Si $0 \in Sp(A)$ alors $0 = \det(A - 0I) = \det(A)$ alors A est singulière (ce qui veut dire non inversible).

Vrai par exemple la matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ effectue un quart de tour sur tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et donc il n'y a pas de vecteur propre possible.

- 1. Faux.** Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ on a $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 + 1 > 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi A n'a donc aucune valeur propre réelle.
- 2. Faux.** Soit v un vecteur propre associé à λ , alors $2v$ l'est aussi. Or, si $v \neq 0$, alors $2v \neq v$, donc il n'existe pas un unique vecteur propre.

3. Faux. La matrice identité I_2 admet tous les vecteurs non nuls comme vecteurs propres, mais elle n'a qu'une seule valeur propre $\lambda = 1$. L'existence d'un vecteur propre ne garantit pas une infinité de valeurs propres distinctes, d'ailleurs en dimension finie il y aura toujours un nombre fini de valeurs propres.

4. Faux.

$$v = 0 \Rightarrow Av = 0 = 0v.$$

Mais, par définition, un vecteur propre doit être non nul, ainsi $v = 0$ ne peut donc pas être un vecteur propre.

5. Vrai. Le polynôme caractéristique est donné par :

$$\det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^\top) = \det(A^\top - \lambda I).$$

A et $A^\top$ ont les mêmes polynômes caractéristiques donc elles ont les mêmes valeurs propres.

6. Faux. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On a

$$Av = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0v.$$

Donc v est un vecteur propre de A pour $\lambda = 0$. Mais

$$A^\top v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Comme $A^\top v$ n'est pas colinéaire à v , alors v n'est pas un vecteur propre de $A^\top$.

7. Vrai. Soit v un vecteur propre de A pour la valeur propre λ , alors :

$$Av = \lambda v.$$

En multipliant encore par A :

$$A^2v = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda^2v.$$

Donc v est un vecteur propre de A^2 pour la valeur propre λ^2 .

1. Valeurs propres de A

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2(3 - \lambda) = 0.$$

$\Rightarrow$ Valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ (multiplicité 2), $\lambda_2 = 3$ (multiplicité 1). Sinon comme la matrice est triangulaire on peut directement écrire que ses termes diagonaux sont ses valeurs propres.

2. Sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 2$

$$(A - 2I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(A - 2I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \\ y \text{ libre.} \end{cases}$$

$$\implies \text{Ker}(A - 2I) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \dim(\text{Ker}(A - 2I)) = 1.$$

Sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 3$

$$(A - 3I) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(A - 3I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z \text{ libre.} \end{cases}$$

$$\implies \text{Ker}(A - 3I) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \dim(\text{Ker}(A - 3I)) = 1.$$

1. Déterminons le rang de A

$$A \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) > 0.$$

$$A \text{ non inversible} \Rightarrow \text{rang}(A) < 2.$$

$$\Rightarrow \text{rang}(A) = 1.$$

2. Montrons que 0 est une valeur propre de A

$$A \text{ non inversible} \Rightarrow \det(A) = 0.$$

$$\det(A - 0I) = \det(A) = 0.$$

$\Rightarrow 0$ est racine du polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I)$, donc 0 est une valeur propre de A .

Ne vous inquiétez pas, la question était dure !

3. Montrons que 1 est une valeur propre de A si $A^2 = A$

$$\dim(\text{Ker}(A)) = 2 - \text{rang}(A) = 1 \neq 2.$$

Soit $v \notin \text{Ker}(A)$, alors $Av \neq 0$.

$$A(Av) = A^2v = Av.$$

$\Rightarrow Av$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

1. Valeurs propres de A

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix}.$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Par développement, on obtient :

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(0 - \lambda)^2.$$

$\Rightarrow$ Valeurs propres : $\lambda_1 = 3$ (multiplicité 1), $\lambda_2 = 0$ (multiplicité 2).

2. Sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 3$

$$(A - 3I) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$(A - 3I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ x - 2y + z = 0, \\ x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

En résolvant on obtient que :

$$\Rightarrow \text{Ker}(A - 3I) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \dim(\text{Ker}(A - 3I)) = 1.$$

Sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 0$

$$(A - 0I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(A - 0I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \quad \implies \quad \left\{ x + y + z = 0. \right.$$

Solutions : deux variables libres, donc deux vecteurs indépendants.

$$\implies \text{Ker}(A - 0I) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \dim(\text{Ker}(A - 0I)) = 2.$$

1.OUI Si $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Pour quels θ , $R(\theta)$ possède des valeurs propres ?

$$\begin{aligned}\det(R(\theta) - \lambda I) &= \begin{vmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\cos \theta - \lambda)^2 + \sin^2 \theta = \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1.\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique de $R(\theta)$ admet des racines λ réelles si et seulement si le discriminant " $b^2 - 4ac$ " est positif ou nul :

$$4 \cos^2 \theta - 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 \theta \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos \theta = \pm 1.$$

$$\Rightarrow \theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

4. Valeurs propres de D

$$D = \text{Diag}(1, 2, 3, 4, 5).$$

$$\det(D - \lambda I) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda)(4 - \lambda)(5 - \lambda).$$

$\Rightarrow$ Valeurs propres de D : 1, 2, 3, 4, 5.