

Diagonalisation

Solutions du cours #9



MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

1. Faux : Par exemple $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ne sont pas semblables et pourtant leurs spectres sont égaux.

2. Vrai : Soit P_1 et P_2 des matrices inversibles telles que :

$$A = P_1 B P_1^{-1}, \quad B = P_2 C P_2^{-1}.$$

En remplaçant B dans la première équation :

$$A = P_1 (P_2 C P_2^{-1}) P_1^{-1} = (P_1 P_2) C (P_1 P_2)^{-1}.$$

Donc A est semblable à C .

3. Faux : $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est diagonalisable (car diagonale) et non inversible.

4. Vrai : Si $A = P D P^{-1}$ avec D diagonale et P inversible, alors $A^2 = P D P^{-1} P D P^{-1} = P D^2 P^{-1}$. Comme D^2 est diagonale, A^2 est diagonalisable (et d'ailleurs dans la même base de vecteurs propres que A !).

5. Vrai : Si $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ est diagonalisable et ne possède que 7 en valeur propre, alors

$$A = P \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} P^{-1} = 7PIP^{-1} = 7PP^{-1} = 7I.$$

6. Faux : Avec $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, A est diagonale donc diagonalisable et B aussi

car elle possède deux valeurs propres distinctes (0 et 1), pourtant $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable car sa seule valeur propre est 0 et $\dim(\text{Ker}(A + B)) = 1 \neq 2$.

7. Faux : avec l'exemple de la question précédente $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

8. Vrai : Avec l'exemple de la question 4, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est diagonalisable et non symétrique.

9. Vrai : Si $A = PDP^{-1}$ et inversible alors :

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

D est inversible car $\det D = \det A \neq 0$. Comme D^{-1} reste une matrice diagonale A^{-1} est diagonalisable (et d'ailleurs dans la même base de vecteurs propres).

10. Faux : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ n'a que 0 en valeur propre et n'est pourtant pas diagonalisable.

11. Vrai : Si $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ alors $Ae_1 = ae_1, Ae_2 = be_2, Ae_3 = ce_3$.

- 12.** Faux : Il n'est pas stable par somme (voir le contre exemple avec $n = 2$ à la question 6).
- 13.** Faux : Avec $A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, on a $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, donc A n'a que des valeurs propres réelles.
- 14.** Vrai : Soit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ non inversible, alors A possède 0 comme valeur propre, si l'autre valeur propre de A était $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ alors $\bar{z}$ serait aussi une valeur propre et $\bar{z} \neq z$ (sinon on aurait $z = \bar{z} = 0$). Ainsi A posséderait 3 valeurs propres distinctes ce qui est impossible.

1) Les valeurs propres sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= 0 \\ \Leftrightarrow \det \left(\begin{bmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow (4 - \lambda)(3 - \lambda)(1 - \lambda) &= 0\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$.

2) A possède trois valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$. A est donc diagonalisable.

3)

$$\begin{aligned}x \in \text{Ker}(A - 4I) &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = \frac{3}{2}x_3 \end{cases}\end{aligned}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ convient.}$$

$$\begin{aligned}x \in \text{Ker}(A - 3I) &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1 = x_3 \end{cases}\end{aligned}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ convient.}$$

$$\begin{aligned}
 x \in \text{Ker}(A - I) &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ convient. Donc } P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ fonctionne.}$$

1)

$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. Comme $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, son inverse est :

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{bmatrix} \quad (\lambda_1 \neq 0 \text{ et } \lambda_2 \neq 0 \text{ car } A \text{ est inversible}) .$$

Donc A^{-1} est diagonalisable avec P et D^{-1} .

2)

$$\begin{aligned}A^{-1} + A &= PD^{-1}P^{-1} + PDP^{-1} \\ &= P(D^{-1} + D)P^{-1}.\end{aligned}$$

Comme $D^{-1} + D = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} + \lambda_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} + \lambda_2 \end{bmatrix}$, la matrice $A^{-1} + A$ est diagonalisable avec P et la matrice diagonale associée est :

$$D' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} + \lambda_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} + \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

3)

$$\begin{aligned}A^{-1} - A = 0 &\Rightarrow P(D^{-1} - D)P^{-1} = 0 \\&\Rightarrow D^{-1} - D = 0.\end{aligned}$$

Cela donne l'équation :

$$\frac{1}{\lambda_1} - \lambda_1 = 0, \quad \frac{1}{\lambda_2} - \lambda_2 = 0.$$

Soit, pour λ_1 :

$$\lambda_1^2 - 1 = 0.$$

4)

On sait que $\lambda_2 = -1$.

Pour λ_1 , on a $\lambda_1^2 - 1 = 0$, donc :

$$\lambda_1^2 = 1.$$

Ainsi $\lambda_1 = 1$ ou $\lambda_1 = -1$ mais si $\lambda_1 = -1$ on aurait :

$$A = P \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1} = P(-I)P^{-1} = -PP^{-1} = -I$$

Ce qui est impossible d'après l'énoncé. Donc $\lambda_1 = 1$.

Déterminons les valeurs propres de A :

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 2.\end{aligned}$$

Les solutions de $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ sont :

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

A est diagonalisable car elle possède deux valeurs propres distinctes.

Cherchons un vecteur propre pour $\lambda_1 = 1 + i$:

$$(A - (1 + i)I)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Le système donne $x_1 = ix_2$. Prenons $x_2 = 1$, alors on peut choisir :

$$v_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Par conjugaison, un vecteur propre pour $\lambda_2 = 1 - i$ est :

$$v_2 = \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice de passage est :

$$P = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice diagonale est :

$$D = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}.$$

On a bien $A = PDP^{-1}$.

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -2 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 2 & -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda) ((4 - \lambda)(1 - \lambda) + 2) \\ &= (2 - \lambda)(4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 3).\end{aligned}$$

$\lambda_1 = 2$ (multiplicité algébrique 2), $\lambda_2 = 3$ (multiplicité algébrique 1).

$$\begin{aligned}x \in \text{Ker}(A - 2I) &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

Une base du sous-espace propre peut être : $\left(v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$

$$\begin{aligned}x \in \text{Ker}(A - 3I) &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} .\end{aligned}$$

Une base du sous-espace propre peut être : $\left(v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. Ainsi les multiplicités algébriques et géométriques des deux valeurs propres sont égales, ainsi A est diagonalisable.

Avec :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

On a : $A = PDP^{-1}$

Soit B une matrice diagonalisable dans la même base que A , donc $B = P\tilde{D}P^{-1}$. Montrons que A et B commutent :

$$\begin{aligned}A &= PDP^{-1}, \quad B = P\tilde{D}P^{-1} \\AB &= PDP^{-1}P\tilde{D}P^{-1} = PD\tilde{D}P^{-1} \\BA &= P\tilde{D}P^{-1}PDP^{-1} = P\tilde{D}DP^{-1} \\&\Rightarrow AB = BA.\end{aligned}$$

Ainsi, toute matrice diagonalisable dans la même base de vecteurs propres que A commute avec A .

Supposons que $\lambda_1 = \lambda_2$, alors $D = \lambda_1 I$. Montrons que A et B sont diagonalisables dans la même base.

$$\begin{aligned} A &= \tilde{P} D \tilde{P}^{-1}, \quad D = \lambda_1 I \\ \Rightarrow A &= \lambda_1 I = \tilde{P} D \tilde{P}^{-1} \\ \Rightarrow A &= \tilde{P} D \tilde{P}^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$, A et B sont simultanément diagonalisables dans n'importe quelle base.

Supposons maintenant que $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$\dim(\text{Ker}(A - \lambda_1 I)) = 1,$$

$$\dim(\text{Ker}(A - \lambda_2 I)) = 1.$$

En effet, comme A est diagonalisable, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale au nombre de colonnes de la matrice. On conclut que $\text{Ker}(A - \lambda_1 I)$ et $\text{Ker}(A - \lambda_2 I)$ sont de dimensions maximales et donc de 1.

Par définition, x est un vecteur propre de B associé à la valeur propre 0.

Supposons maintenant que $Bx \neq 0$. Montrons que Bx est un vecteur propre de A et que x est un vecteur propre de B .

$$\begin{aligned}Ax &= \lambda_1 x, \\ ABx &= BAx = B(\lambda_1 x) \\ &= \lambda_1 Bx.\end{aligned}$$

Ainsi, Bx est un vecteur propre de A associé à λ_1 .

Comme $x, Bx \in \text{Ker}(A - \lambda_1 I)$ et $\dim(\text{Ker}(A - \lambda_1 I)) = 1$, ils sont colinéaires donc qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$Bx = \mu x.$$

Cela implique que x est un vecteur propre de B , ce qui conclut la démonstration.

Bingo l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ qui commutent avec A est exactement l'ensemble des matrices qui sont diagonalisables dans la même base de vecteurs propres de A . En réalité ce résultat se généralise pour les matrices de tailles quelconques.