

Exercice préparatif au CP2

Soit

$$W = \{(a + b, a, 2a - 3b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de W et $\dim(W)$.
3. Compléter la base obtenue à la question précédente en une base de $\mathbb{R}^3$. Notons $\mathcal{B}$ cette base. Justifier soigneusement qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Soit

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dont l'inverse est } Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer une base $\mathcal{D} = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que Q soit la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{D}$.

5. Soit $\mathbf{z} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3$. Déterminer $[\mathbf{z}]_{\mathcal{D}}$.