Travaux dirigés 8 du groupe 2
Nombres complexes : solutionnaire

Les exercices sur les nombres complexes sont extraits des notes de cours de calcul I du professeur et du manuel 'calcul à plusieurs variables, de J. Stewart, 2ème édition, Modulo

Exercice 6.1

a) Trouver le conjugué du nombre complexe ci-dessous en fonction de $\overline{z}$, conjugé de z : $\dfrac{7iz-i}{z+i}$

On a $\overline{\left(\dfrac{7iz-i}{z+i}\right)} = \dfrac{\overline{7iz-i}}{\overline{z+i}} = \dfrac{-7i\overline{z}+i}{\overline{z}-i}$.

b) Calculer l'expression et mettre sous la forme $a+bi$

i) $\sqrt{-3}\sqrt{-12} = \sqrt{3i^2}\sqrt{12i^2} = \sqrt{36i^4} = 6i^2 = -6$

ii) $\dfrac{2+3i}{1-5i} = \dfrac{(2+3i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} = \dfrac{-13(1-i)}{1+25} = \dfrac{-1-i}{2}$

iii) $\dfrac{1}{i^{45}} = \dfrac{1}{(i^2)^{22}i} = \dfrac{1}{i} = -i$

iv) $e^{2+i\pi} = e^2(\cos(\pi)+i\sin(\pi)) = -e^2$

Exercice 6.2

Trouver l'ensemble des points $z = x+iy$ tels que

a) $Re(z\overline{z}) \leq Im(z(1+4i))$

On a

$$Re(z\overline{z}) \leq Im(z(1+4i)) \Rightarrow Re(x^2+y^2) \leq Im(x-4y+i(4x+y)) \Rightarrow x^2+y^2 \leq 4x+y$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-4x-y \leq 0 \Rightarrow (x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \sqrt{\frac{17}{4}}$$

Il s'agit de tous les points à l'intérieur du disque de centre $(2,\dfrac{1}{2})$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

b) z^2+2z-3 soit réel

On a $z^2+2z-3 = (x+iy)^2+2(x+iy)-3 = x^2-y^2+2x-3+i(2xy+2y$ est réel si $2xy+2y = 2y(x+1) = 0 \Rightarrow x=-1$ ou $y=0$: il s'agit des points sur les droites $x=-1$ et $y=0$.

Exercice 6.3

Déterminer les formes polaires de $zw, \dfrac{z}{w}$ et $\dfrac{1}{z}$ après avoir mis z et w sous la forme polaire où $z = 2\sqrt{3}-2i$ et $w=-1+i$ On a

$$|z| = \sqrt{4\times 3+4} = 4 \Rightarrow z = 4\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right) = 4e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

$$|w| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow w = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

On en déduit les formes polaires de $zw, \dfrac{z}{w}$ et $\dfrac{1}{z}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{4e^{i\frac{11\pi}{6}}} = \frac{1}{4}e^{-i\frac{11\pi}{6}} = \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{6}} = \\
zw &= 4e^{i\frac{11\pi}{6}}\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{31\pi}{12}} \\
\frac{z}{w} &= \frac{4e^{i\frac{11\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{4}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}
\end{aligned}$$

Exercice 6.4

a) Trouver l'ensemble des racines quatrième de i

On a $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $w^4 = R^4e^{i4\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}+2n\pi i} \Rightarrow w_n = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)}, n = 0, \pm 1, \ldots$. Ainsi, on en déduit

$$w_0 = e^{i\frac{\pi}{8}}, \quad w_1 = e^{i\frac{5\pi}{8}}, \quad w_2 = e^{i\frac{9\pi}{8}}, \quad w_3 = e^{i\frac{13\pi}{8}}.$$

b) Trouver l'ensemble des racines cubiques de $1-i$

On a $w^3 = 1 - i = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{4}+2n\pi\right)} \Rightarrow w_n = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{2n\pi}{3}\right)}, n = 0, n \pm 1, \ldots$. Ainsi, on en déduit

$$w_0 = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{7\pi}{12}}, \quad w_1 = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{15\pi}{12}}, \quad w_2 = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{23\pi}{12}}.$$

Exercice 6.5

Utiliser la formule de De Moivre pour exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

Comme $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta} \Rightarrow z^3 = e^{i3\theta} = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$, alors on a

$$\begin{aligned}
z^3 &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\
&= (\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)) + i(3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)) = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)$ et $\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)$.

Section 2.5 : nombres complexes (manuel de Stewart)

Exercices 4,5 **et** 7

Dans les exercices 4,5 et 7, évaluez l'expression et écrivez votre réponse sous la forme $a+bi$.

4) $(1+2i)(8-3i) = 8 + 13i - 6i^2 = 14 + 13i$.

5) $\overline{12+7i} = 12 - 7i$.

7) $\dfrac{1+4i}{3+2i} = \dfrac{(1+4i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \dfrac{11+10i}{9+4} = \dfrac{11+10i}{13}$.

Exercices 20 **et** 27

Dans les exercices 20 et 27, trouvez toutes les solutions de l'équation.

20) $x^4 = 1$.
On a $1 = e^{i0}$ et $w^4 = R^4 e^{i4\theta} = e^{i2n\pi i} \Rightarrow w_n = e^{i\frac{n\pi}{2}}, n = 0, \pm 1, \dots$. Ainsi, on en déduit

$$w_0 = e^{i0} = 1, \quad w_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad w_2 = e^{i\pi} = -1, \quad w_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.$$

27) $x^2 + 2ix + 1 = 0$.
On a $\Delta = (2i)^2 - 4(1)(1) = -8 = 8i^2$ et les racines de cette quadratique sont

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2i - 2\sqrt{2}\mathrm{i}}{2} = -i - i\sqrt{2}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2i + 2\sqrt{2}\mathrm{i}}{2} = -i + i\sqrt{2}.$$

Exercices 37 **et** 39

Dans les exercices 37 et 39, trouvez les formes polaires de zw, de z/w et de $1/z$ en écrivant d'abord z et w sous la forme polaire.

37) $z = \sqrt{3} + i, w = 1 + \sqrt{3}i$.
On a

$$|z| = \sqrt{3 + 1} = 2 \Rightarrow z = 2\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$|w| = \sqrt{1^2 + 3} = 2 \Rightarrow w = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

On en déduit les formes polaires de $zw, \dfrac{z}{w}$ et $\dfrac{1}{z}$

$$zw = 2e^{i\frac{\pi}{6}} 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 4e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad \frac{z}{w} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{6}}, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

39) $z = 2\sqrt{3} - 2i, w = 1 + i$.
On a

$$|z| = \sqrt{4 \times 3 + (-2)^2} = 4 \Rightarrow z = 4\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow w = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

On en déduit les formes polaires de $zw, \dfrac{z}{w}$ et $\dfrac{1}{z}$

$$zw = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \quad \frac{z}{w} = \frac{4e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)} = e^{-i\frac{5\pi}{12}}, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{4e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Exercices 41 **et** 43

Dans les exercices 41 et 43, trouvez la puissance indiquée à l'aide de la formule de De Moivre.

41) $(1 + i)^{20}$.
Comme $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, alors on obtient que

$$(1 + i)^{20} = (\sqrt{2})^{20} e^{i20\frac{\pi}{4}} = 2^{10} e^{i5\pi} = -2^{10} = -1024.$$

43) $(2\sqrt{3} + 2i)^5$.
Puisque $2\sqrt{3} + 2i = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$ alors on tire que

$$(2\sqrt{3} + 2i)^5 = \left(4e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5 = 4^5 e^{i\frac{5\pi}{6}} = 4^5\frac{\sqrt{3} - i}{2} = 512(\sqrt{3} - i).$$