

## TD#10 – Solutions

### Exercices du livre

#### Section 6.1

9 et 11. Calculer  $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ .

14.  $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{z}\|$ .

17.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\top \mathbf{v} = 0$ , donc les vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont orthogonaux.

19. b. Vrai. On note  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  et  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^\top (c\mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^n u_i (cv_i) \\ &= \sum_{i=1}^n c(u_i v_i) \\ &= c \sum_{i=1}^n u_i v_i \\ &= c(\mathbf{u}^\top \mathbf{v}).\end{aligned}$$

d. Faux. Il faut choisir une matrice singulière pour construire le contre-exemple.

23. Voir que  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ . Donc  $\mathbf{u}^\top \mathbf{v} = 0$  et  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ . C'est le théorème de Pythagore, mais les calculs illustreront cette égalité.

30. Cette question est traitée dans le cours #10 (démonstration du théorème de la slide 14).

31. Soit  $\mathbf{x} \in W \cap W^\perp$ . Puisque  $\mathbf{x} \in W^\perp$ , pour tout  $\mathbf{w} \in W$ , on a :  $\mathbf{x}^\top \mathbf{w} = 0$ . Mais puisque  $\mathbf{x} \in W$ , on peut prendre dans l'égalité précédente  $\mathbf{w} = \mathbf{x}$  et obtenir :  $\mathbf{x}^\top \mathbf{x} = 0$ , soit  $\|\mathbf{x}\|^2 = 0$ . Ceci implique  $\mathbf{x} = 0$ .

#### Section 6.2

11. En notant  $\mathbf{x}$  le vecteur à projeter et  $\mathbf{u}$  le vecteur directeur de la droite sur laquelle on souhaite projeter, on a :  $\text{Proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = 1/2\mathbf{u}$ .

13.  $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$  avec  $\hat{\mathbf{y}} = \text{Proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = (-4/5, 7/5)$  (se calcule avec la formule du projeté orthogonal) et  $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = (14/5, 8/5)$ .
21. Les vecteurs sont tous orthogonaux deux à deux, donc la famille est orthogonale. De plus, chaque vecteur est unitaire. Donc la famille est orthonormée.
23. a. Vrai. Il suffit d'en exhiber une, par exemple  $((0, 1), (1, 1))$ .  
 b. Vrai : si  $\mathbf{y} \in \text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$  où la famille est orthogonale, alors :

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^p \text{Proj}_{\mathbf{v}_i}(\mathbf{y})$$

donc les coefficients de la combinaison linéaire sont les  $\mathbf{y}^\top \mathbf{v}_i / \|\mathbf{v}_i\|^2$ .

- c. Faux. Si  $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$  alors

$$\left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\right)^\top \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) = \frac{1}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \mathbf{u}^\top \mathbf{v} = 0.$$

- d. Faux. Contre-exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les colonnes sont orthonormées, mais la matrice n'est pas orthogonale car elle n'est pas carrée. Rappelez-vous bien qu'une matrice orthogonale est une matrice **carrée** dont les colonnes sont orthonormées.

- e. Faux. Prendre  $\mathbf{y} \neq 0 \in D$ ,  $\text{dist}(\mathbf{y}, D) = 0$  mais  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y}$  et  $\|\mathbf{y}\| \neq 0$ .

29. Des matrices orthogonales sont inversibles.  $U\mathbf{V}$  est donc inversible comme produit de matrices inversibles. On calcule  $(U\mathbf{V})^\top U\mathbf{V} = \mathbf{V}^\top U^\top U\mathbf{V} = \mathbf{V}^\top \mathbf{V} = I$ .

31. Si  $\mathbf{u} \in D$ , tout vecteur de  $D$  s'écrit sous forme  $c\mathbf{u}$  ( $c \in \mathbb{R}$ ). Ainsi pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\frac{\mathbf{x}^\top (c\mathbf{u})}{\|c\mathbf{u}\|^2} (c\mathbf{u}) = c^2 \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{u}}{\|c\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} = \frac{c^2}{c^2} \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}.$$

33. Soient  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{Proj}_D(\alpha\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \frac{(\alpha\mathbf{x} + \mathbf{y})^\top \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} \\ &= \frac{\alpha\mathbf{x}^\top \mathbf{u} + \mathbf{y}^\top \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} \\ &= \alpha \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{y}^\top \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} \\ &= \alpha \text{Proj}_D(\mathbf{x}) + \text{Proj}_D(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

### Section 6.3

1.  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{b}$  où  $\mathbf{p} = \text{Proj}_{\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}}(\mathbf{x})$ .  $\mathbf{b}$  s'obtient simplement par soustraction ensuite, puisque  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{p}$  sont connus. Le cours garantit qu'avec cette construction,  $\mathbf{b} \in \text{Vect}\{\mathbf{u}_4\}$ .
5. On vérifie que  $\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_2 = 0$  : la famille est orthogonale. On peut donc décomposer la projection en  $\text{Proj}_{\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}}(\mathbf{y}) = \text{Proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{y}) + \text{Proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{y}) = (-1, 2, 6)$ . En réalité, on trouve  $\text{Proj}_{\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ . Ceci indique que  $\mathbf{y} \in \text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ , on aurait pu le constater directement par  $\mathbf{y} = 1/2\mathbf{u}_1 + 5/2\mathbf{u}_2$ .
13. Ces vecteurs sont exactement ceux de  $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  donc il s'agit de  $\text{Proj}_{\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}}(\mathbf{z})$ . Le calculer.
15. On vérifie d'abord que  $\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_2 = 0$ . Ceci permet de décomposer la projection :  $\hat{\mathbf{y}} = \text{Proj}_{\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}}(\mathbf{y}) = \text{Proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{y}) + \text{Proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{y}) = (3, -9, -1)$ . Donc  $\text{dist}(\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| = \sqrt{40}$ .
17. b.  $\text{Proj}_W(\mathbf{y}) = UU^\top \mathbf{y}$ .
19. Comme tout vecteur de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{u}_3 = \text{Proj}_{\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}}(\mathbf{u}_3) + \mathbf{b}$  où  $\mathbf{b} \in (\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\})^\perp$ . Il suffit donc d'identifier ce  $\mathbf{b}$  par  $\mathbf{b} = \mathbf{u}_3 - \text{Proj}_{\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}}(\mathbf{u}_3)$ . On trouve  $\mathbf{b} = (0, 2/5, 1/5)$ , et tout multiple est admissible également.
21. b. Vrai. La démonstration est celle du théorème 8 de la section 6.3, donnée dans le manuel.  
c. Faux. La preuve se fait de la même manière que dans l'exercice 6.2-31.  
d. Vrai. Si  $\mathbf{y} \in W$  alors  $\text{dist}(\mathbf{y}, W) = 0$ , soit  $\|\text{Proj}_W(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\| = 0$  et  $\mathbf{y} = \text{Proj}_W(\mathbf{y})$ .  
e. Traité en classe.
23. Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Puisque  $\text{Ker}(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{u}$  où  $\mathbf{u} \in \text{Ker}(A)$  et  $\mathbf{p} \in (\text{Ker}(A))^\perp$ . Or  $(\text{Ker}(A))^\perp = \text{Im}(A^\top) = \text{Lgn}(A)$ .
24. a. Puisque les familles sont orthogonales, pour tous  $i, j \in \llbracket 1; p \rrbracket$  avec  $i \neq j$ , on a  $\mathbf{w}_i^\top \mathbf{w}_j = 0$ . De la même manière pour tous  $i, j \in \llbracket 1; q \rrbracket$  avec  $i \neq j$ , on a  $\mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_j = 0$ . Par définition de  $W^\perp$ , on a  $\mathbf{w}_i^\top \mathbf{v}_j = 0$  pour tous  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1; q \rrbracket$ . Finalement, la famille  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_p, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q)$  est orthogonale.  
b. Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . On veut montrer que  $\mathbf{x} \in \text{Vect}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_p, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q\}$ . Le théorème de projection orthogonale affirme qu'il existe  $\hat{\mathbf{x}} \in W$  et  $\mathbf{z} \in W^\perp$  tels que  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{z}$ . Puisque  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_p)$  est une base de  $W$ ,  $\hat{\mathbf{x}} \in \text{Vect}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_p\}$ . De même,  $\mathbf{z} \in \text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q\}$ . Il en résulte que  $\mathbf{x} \in \text{Vect}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_p, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q\}$ .  
c. Le point a. a montré que la famille  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_p, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q)$  est orthogonale. Puisque  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_p)$  est une base de  $W$ , elle ne contient pas le vecteur nul. De même,  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q)$  ne contient pas le vecteur nul. La famille  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_p, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q)$  est une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul, elle est donc libre. Le point b. montre que cette famille est

génératrice de  $\mathbb{R}^n$ . Finalement, cette famille est une base de  $\mathbb{R}^n$ . Il en résulte que  $\dim(\mathbb{R}^n)$  correspond au nombre de vecteurs dans la famille  $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_p, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q)$ , et donc  $\dim(\mathbb{R}^n) = n = p + q = \dim(W) + \dim(W^\perp)$ .

## Exercice supplémentaire

### Exercice 12

1.  $\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_2 = -1 \neq 0$ .
- 2.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{x}}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{x}}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 \\ &= \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5/2 \\ -1 \\ 7/2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}_1) &= \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_1\| \\ &= \left\| \begin{bmatrix} -1/2 \\ 2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2.121. \end{aligned}$$

4. On constate que  $\hat{\mathbf{x}}_2 = 8/3\mathbf{u}_1 + 1/3\mathbf{u}_2$ , d'où  $\hat{\mathbf{x}}_2 \in L$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}_2) &= \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_2\| \\ &= \left\| \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.155. \end{aligned}$$

5.  $\hat{\mathbf{x}}_2 \in W$  et  $\text{dist}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}_2) < \text{dist}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}_1)$ , donc  $\hat{\mathbf{x}}_1$  n'est pas le point de  $W$  le plus proche de  $\mathbf{x}$ . Il ne peut donc pas en être le projeté orthogonal sur  $W$ .