

TD#10 : Orthogonalité et projections orthogonales

Programme

1	Notion d'orthogonalité, complément orthogonal	1
2	Bases orthonormées, matrices orthogonales	1
3	Projections orthogonales	2
3.1	Projection sur une droite vectorielle	2
3.2	Projection sur un sous-espace de dimension finie	2
4	Vrai ou faux ?	2
5	Exercice complémentaire	3

1 Notion d'orthogonalité, complément orthogonal

Exercice 1

 Section 6.1, exercice 25.

Exercice 2

 Section 6.1, exercice 28.

2 Bases orthonormées, matrices orthogonales

Exercice 3

 Section 6.2, exercice 26.

Exercice 4

 Section 6.2, exercice 27.

Exercice 5

Démontrer le théorème présenté à la slide 22 du cours #10 : si $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ possède des colonnes orthonormées, alors

1. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|U\mathbf{x}\| = \|x\|$;
2. pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\langle U\mathbf{x}, U\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$;
3. $\langle U\mathbf{x}, U\mathbf{y} \rangle = 0 \iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

3 Projections orthogonales

3.1 Projection sur une droite vectorielle

Exercice 6

 Section 6.2, exercice 15.

Exercice 7

 Section 6.2, exercice 31.

3.2 Projection sur un sous-espace de dimension finie

Exercice 8

 Section 6.3, exercice 7.

Exercice 9

 Section 6.3, exercice 19.

Exercice 10

 Section 6.3, exercice 23.

4 Vrai ou faux ?

Exercice 11 (Vrai ou faux ?)

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifier.

1. Soient $\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$ et $W = \text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$. Si pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\mathbf{x} \perp \mathbf{v}_i$, alors $\mathbf{x} \in W^\perp$.

2. Si les colonnes de $U \in \mathbb{R}^{n \times p}$ sont orthonormées, alors pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\text{Proj}_{\text{Im}(U)}(\mathbf{y}) = UU^\top \mathbf{y}$.
3. Si une matrice quelconque A vérifie la relation $A^\top A = I$, alors A est carrée.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, l'intersection de deux sous-espaces orthogonaux est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1.
5. Si A est une matrice carrée, les vecteurs de $\text{Im}(A)$ sont orthogonaux à ceux de $\text{Ker}(A)$.
6. Si A est une matrice symétrique, les vecteurs de $\text{Im}(A)$ sont orthogonaux à ceux de $\text{Ker}(A)$.

5 Exercice complémentaire

Exercice 12 (Projection sur une famille non orthogonale)

Soient $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ deux vecteurs d'un espace vectoriel quelconque. On note $W = \text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. Le but de cet exercice est de montrer par un contre-exemple simple dans $\mathbb{R}^3$, que si la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ n'est pas orthogonale, la décomposition de la projection orthogonale sous la forme

$$\text{Proj}_W(\mathbf{x}) = \text{Proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{x}) + \text{Proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{x})$$

n'est plus valide. Soient

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

ainsi que $W = \text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

1. Vérifier que la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ n'est pas orthogonale.
2. Calculer le vecteur suivant, dont il faut montrer qu'il *n'est pas* égal à $\text{Proj}_W(\mathbf{x})$:

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \text{Proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{x}) + \text{Proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{x}).$$

3. Calculer $\text{dist}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}_1)$.
4. Vérifier que

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 1/3 \\ 7/3 \end{bmatrix} \in W$$

et calculer $\text{dist}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}_2)$.

5. Conclure de ce qui précède, que $\hat{\mathbf{x}}_1$ n'est pas le projeté orthogonal de $\mathbf{x}$ sur W .