MTH1008 (Algèbre linéaire appliquée) Groupe 10
Polytechnique Montréal
Hiver 2026

TD#11 : Gram-Schmidt, moindres carrés

Programme

1 Algorithme de Gram-Schmidt et factorisation QR

1.1 Gram-Schmidt

Exercice 1

Section 6.4, exercice 11.

1.2 Factorisation QR

Exercice 2

Section 6.4, exercice 15.

Exercice 3

Section 6.4, exercice 19.

2 Résolution de systèmes linéaires au sens des moindres carrés

2.1 Résolution par les équations normales

Exercice 4

Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Formuler les équations normales associées au système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
2. En résolvant le système d'équations normales précédemment formulé, donner une solution au sens des moindres carrés du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
3. Donner le vecteur d'erreur $\mathbf{e}$ et l'erreur quadratique $\|\mathbf{e}\|$ associés à la solution trouvée.

Exercice 5

Soient

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que ce système admet plusieurs solutions au sens des moindres carrés.
2. Donner deux solutions distinctes du système au sens des moindres carrés. Vérifier que ces deux solutions engendrent les mêmes erreurs quadratiques.

2.2 Unicité des solutions au sens des moindres carrés

Exercice 6

Soient $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Le but de cet exercice est de montrer l'équivalence suivante :

$$\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ admet une solution unique au sens des moindres carrés} \iff \operatorname{rang}(A) = n.}$$

1. Montrer que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une solution unique au sens des moindres carrés si et seulement si $A^\top A$ est inversible.
2. Ce deuxième point vise à montrer que $A^\top A$ est inversible si et seulement si A est de plein rang colonne.
   (a) Nous montrons d'abord que $\operatorname{Ker}(A^\top A) = \operatorname{Ker}(A)$.
   Rappel : si A et B sont deux ensembles, alors :
   $$A = B \iff A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A.$$

i. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) \subseteq \mathrm{Ker}(A^\top A)$.

ii. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^\top A) \subseteq \mathrm{Ker}(A)$.

(b) En déduire que $\mathrm{rang}(A^\top A) = \mathrm{rang}(A)$.

(c) En conclure que $A^\top A$ est inversible si et seulement si A est de plein rang colonne.

3. Conclure quant au résultat énoncé.

2.3 Résolution par projection sur $\mathrm{Im}(A)$

Exercice 7 (Moindres carrés à l'envers)

Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

1. Sans résoudre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ au sens des moindres carrés, calculer $\mathrm{Proj}_{\mathrm{Im}(A)}(\mathbf{b})$.
2. À l'aide du projeté calculé à la question précédente, résoudre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ au sens des moindres carrés.

Exercice 8 (Moindres carrés et systèmes réalisables)

Soient $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ et $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ tels que $A\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$. Sans faire aucun calcul, donner les valeurs :

1. du projeté $\mathrm{Proj}_{\mathrm{Im}(A)}(\mathbf{b})$;
2. d'une solution du système au sens des moindres carrés ;
3. de l'erreur quadratique associée à cette solution.

2.4 Moindres carrés et factorisation QR

Exercice 9

Section 6.5, exercice 16.

3 Vrai ou faux ?

Exercice 10 (Vrai ou faux ?)

Dire des énoncés suivants s'ils sont vrais ou faux, et justifier.

1. Soit $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si la famille $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_p)$ est obtenue par application de l'algorithme de Gram-Schmidt sur $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$, alors $\mathrm{Vect}\,\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_p\} = \mathrm{Vect}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$.
2. Toute matrice à coefficients réels admet une décomposition QR.
3. $\min_{\mathbf{x}} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = 0$ si et seulement si le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est réalisable.