

## TD#12 – Solutions

### 1 Exercices du manuel

#### Section 7.1

5. Symétrique.  
6. Pas carrée, donc pas symétrique.  
11,12. Calculer  $A^T A$ . Si le résultat est symétrique, la matrice est orthogonale puisqu'elle est carrée.  
15.  $A = PDP^T$  où

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}.$$

24.  En vidéo.

25. a. Vrai. Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est diagonalisable en base orthonormée, alors il existe  $P, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que  $A = PDP^T$ . D'où :

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T$$

- puisque  $D^T = D$ . Donc  $A$  est symétrique.  
b. Vrai. C'est une conséquence du théorème spectral.  
c. Faux. Prendre  $I_2$ , par exemple.  
d. Vrai si  $\mathbf{v}$  est unitaire. Si  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , alors

$$\begin{aligned} \text{Proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{x}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} \\ &= \mathbf{v} \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{x}}{\|\mathbf{v}\|^2} \\ &= \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}^T}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{x} \end{aligned}$$

puisque  $\|\mathbf{v}\| = 1$ . Si  $\mathbf{v}$  n'est pas unitaire, c'est faux.

26. ▶ En vidéo.  
 27.  $(A\mathbf{x})^\top \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top A^\top \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top (A\mathbf{y})$  puisque  $A^\top = A$ .  
 29. ▶ En vidéo.  
 30. ▶ En vidéo.  
 35. ▶ En vidéo.

## Section 7.2

2. La forme quadratique obtenue avec cette matrice est définie par  $Q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + x_2x_3$ . Calculer avec les vecteurs donnés.
7. La matrice associée à cette forme quadratique est  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ . Il faut la diagonaliser sous forme  $A = PDP^\top$ . Le changement de variable est alors  $\mathbf{y} = P^\top \mathbf{x}$  et l'expression après changement de variable est  $\tilde{Q}(\mathbf{y}) = -4y_1^2 + 6y_2^2$ .
8. ▶ En vidéo.
9. Cette forme quadratique est définie positive (étudier la matrice qui la représente). On pose  $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ , le changement de variable  $\mathbf{y} = P^\top \mathbf{x}$  donne  $\tilde{Q}(\mathbf{y}) = 2y_1^2 + 6y_2^2$ .
12. ▶ En vidéo.
13. Semi-définie positive.  $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ , avec  $\mathbf{y} = P^\top \mathbf{x}$ , on obtient  $\tilde{Q}(\mathbf{y}) = 10y_2^2$ .
25. ▶ En vidéo.  
 27,28. ▶ En vidéo.

## 2 Exercices hors manuel

### Exercice 1

2. Vrai. Si  $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ , alors  $\text{Sp}(A^k) = \{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_p^k\}$ . Or  $\lambda > 0 \implies \lambda^k > 0$ , quel que soit  $k \in \mathbb{N}$ .
3. Faux. Avec  $A = -I$ ,  $A$  est définie négative alors que  $A^2 = I$  est définie positive.
4. Vrai. D'abord, si  $A$  est définie positive, elle est inversible puisque ses valeurs propres sont strictement positives (donc  $0 \notin \text{Sp}(A)$ ). Si  $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ , alors  $\text{Sp}(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_p} \right\}$ . Or  $\lambda > 0 \implies \frac{1}{\lambda} > 0$ .
5. Vrai. explication donnée au début du point précédent.
6. Vrai. Reprenez la démarche de l'exercice 7.2-27.

### Exercice 6

1.  $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$ . Les valeurs propres sont  $1 - \alpha$  et  $1 + \alpha$ . Une base de vecteurs propres est :  $\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ .
2. Il faut que les valeurs propres soient strictement positives. Donc que  $\begin{cases} 1 + \alpha > 0 \\ 1 - \alpha > 0 \end{cases}$   
ce qui implique directement que  $\alpha \in ]-1; 1[$ .

### Exercice 8

1. Faux.  $I$  est définie positive,  $-I$  est définie négative.
2. Vrai. Ceci peut se montrer en considérant la décomposition spectrale de  $A$  et le fait que ses valeurs propres sont positives ou nulles.
3. Faux. Soit  $\lambda_i$  une valeur propre de  $A$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , alors la multiplicité géométrique est 1, et toute base de  $\text{Ker}(A - \lambda_i I)$  est de la forme  $\{c_i \mathbf{v}_i\}$  avec  $c_i \neq 0$ . Ainsi, une base de vecteurs propres est nécessairement orthogonale car les sous-espaces propres sont orthogonaux entre eux.
4. Vrai. Soit  $\mathbf{v}_3$  un vecteur non nul orthogonal à  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ . Alors  $A = PDP^\top$  avec  $D = \text{diag}(1, 1, 0)$  et  $P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ . Si  $P^\top$  n'est pas inversible, alors  $\exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  tel que  $P^\top \mathbf{x} = \mathbf{0}$  donc  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  et  $A$  n'est pas inversible. Sinon,  $A$  a 0 comme valeur propre donc n'est pas inversible non plus.
5. Faux. Un contre-exemple est simple à trouver.
6. Faux si ses coefficients sont complexes. Exemple :  $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ . Si on ne considère que des matrices à coefficients réels, c'est vrai.
7. Vrai.  $A$  est orthogonale donc  $A^\top A = I$ , mais  $A$  est symétrique donc  $A^\top A = A^2$ .
8. Faux. Écrivez la matrice associée à  $Q$ .
9. Faux. Cette forme contient un terme linéaire.
10. Vrai. Puisque  $A \prec 0$ , tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  vérifie  $\lambda < 0$ . Or si  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ ,  $\lambda^2 \in \text{Sp}(A^2)$ , et puisque  $\lambda < 0$ ,  $\lambda^2 > 0$ , donc  $\text{Sp}(A^2) \subset \mathbb{R}_+^*$  :  $A^2$  est définie positive.

**Exercice 9** La structure de la matrice  $A$  permet un calcul astucieux d'une factorisation de son polynôme caractéristique. En effet le déterminant

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \left( \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-\lambda \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

peut se simplifier en faisant l'opération  $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{k=2}^n L_k$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \left( \begin{bmatrix} n-\lambda & n-\lambda & \cdots & n-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-\lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= (n-\lambda) \det \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-\lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= (n-\lambda) \det \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= (n-\lambda)(-\lambda)^{n-1} \end{aligned}$$

L'avant dernière expression étant obtenu en soustrayant la première ligne à toutes les lignes suivantes. Ainsi  $A$  a  $n$  et  $0$  pour valeurs propres et est symétrique donc semi-définie positive.

**Exercice 10**

1.  $q_1(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$  ce qui montre que  $q_1 \geq 0$  pour tout  $(x, y)$  et  $q_1(x, y) = 0$  si et seulement si  $x + y = 0$ . La forme quadratique est donc semi-définie positive.
2.  $q_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$  est la somme de deux carrés moins un carré. Notamment pour  $(x, y, z) = (1, 0, 0)$  on a  $q_2(x, y, z) = 1 > 0$  et pour  $(0, 0, 1)$  on a  $q_2 = -1 < 0$ . La forme prend donc des valeurs de signes opposés et est indéfinie.
3. Pour  $q_3(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2$  la matrice symétrique associée (dans la base canonique) est  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ . On calcule le polynôme caractéristique  $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(4 - \lambda) -$

$1 = \lambda^2 - 5\lambda + 3$  dont les racines sont  $\lambda = (5 \pm \sqrt{13})/2 > 0$ . Les deux valeurs propres strictement positives impliquent que la forme quadratique est définie positive.

4.  $q_4(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2yz + z^2 = x^2 + (y + z)^2 \geq 0$  et  $q_4 = 0$  si et seulement si  $x = 0$  et  $y = -z$ . La forme quadratique est donc semi-définie positive.

5.  $q_5(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz$ , associée à  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ . On calcule

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \left( \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \right).$$

En effectuant  $L_1 \leftarrow L_1 - (2 - \lambda)L_2$ , le déterminant devient

$$\det \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 - (2 - \lambda)^2 & -(2 - \lambda) \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \right) = -\det \left( \begin{bmatrix} 1 - (2 - \lambda)^2 & -(2 - \lambda) \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \right).$$

On factorise  $-(2 - \lambda)$ , ce qui permet de conclure le calcul :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= (2 - \lambda) \det \left( \begin{bmatrix} 1 - (2 - \lambda)^2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) \\ &= (2 - \lambda) ((2 - \lambda)^2 - 2) \\ &= (2 - \lambda) ((2 - \lambda)^2 - \sqrt{2}^2) \\ &= (2 - \lambda) (2 - \sqrt{2} - \lambda) (2 + \sqrt{2} - \lambda). \end{aligned}$$

Avec cette dernière factorisation, il est ainsi clair que les valeurs propres de  $A$  sont  $2$ ,  $2 - \sqrt{2}$  et  $2 + \sqrt{2}$  qui sont strictement positives. La forme quadratique est donc définie positive.

**Exercice 11** Pour  $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ , la matrice associée est

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  satisfont

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A) = a + c, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \det(A) = ac - b^2.$$

1.  $q$  est définie négative si et seulement si  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ , c'est-à-dire

$$a + c < 0 \quad \text{et} \quad ac - b^2 > 0.$$

2.  $q$  est définie positive si et seulement si  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ , c'est-à-dire

$$a + c > 0 \quad \text{et} \quad ac - b^2 > 0.$$

3.  $q$  est semi-définie positive si et seulement si  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$  dont l'une nulle, c'est-à-dire

$$ac - b^2 = 0 \quad \text{et} \quad a + c \geq 0.$$

4.  $q$  est semi-définie négative si et seulement si  $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$  dont l'une nulle, c'est-à-dire

$$ac - b^2 = 0 \quad \text{et} \quad a + c \leq 0.$$

5.  $q$  est indéfinie si et seulement si  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ , c'est-à-dire

$$ac - b^2 < 0.$$