MTH1008 (Algèbre linéaire appliquée) Groupe 10
Polytechnique Montréal
Hiver 2026

# TD#12 : Matrices symétriques et formes quadratiques

## Programme


**1 Diagonalisation des matrices symétriques** **1**

**2 Formes quadratiques** **1**

**3 Conclusion** **2**

**4 Exercices supplémentaires** **2**


## 1 Diagonalisation des matrices symétriques

### Exercice 1

Section 7.1, exercice 19. Écrire de plus la décomposition spectrale issue de la diagonalisation obtenue.

### Exercice 2

Section 7.1, exercice 29.

## 2 Formes quadratiques

### Exercice 3

Section 7.2, exercice 5.

### Exercice 4

Section 7.2, exercice 11.

### Exercice 5

Soit $Q$ la forme quadratique définie par $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 2\alpha xy$.

1. Donner la matrice associée à $Q$, trouver ses valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre.
2. À quelles conditions sur $\alpha$ la matrice est-elle définie positive ?

**Exercice 6**

Section 7.2, exercice 19.

## 3 Conclusion

**Exercice 7** (Vrai ou faux ?)

Dire des énoncés suivants s'ils sont vrais ou faux, et justifier.

1. Toute matrice diagonalisable en base orthonormée est symétrique.
2. Si $A$ est définie positive alors $A^{-1}$ est définie positive.
3. Une matrice définie positive est inversible.
4. La somme de deux matrices définies négatives est définie négative.

## 4 Exercices supplémentaires

**Exercice 8** (Vrai ou faux ?)

Dire des énoncés suivants s'ils sont vrais ou faux, et justifier.

1. Pour toute matrice définie positive $A$, $-A$ est aussi définie positive.
2. Si $A$ est une matrice carrée et symétrique de $\mathbb{R}^{n\times n}$ et si la forme quadratique $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ est semi-définie positive, alors $A$ a des valeurs propres positives ou nulles.
3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique ayant $n$ valeurs propres distinctes. Il est possible de trouver une base non orthogonale de vecteurs propres de $A$.
4. Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ tels que $A = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\top + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^\top$. Alors $A$ n'est pas inversible.
5. Une matrice inversible est forcément symétrique.
6. Une matrice symétrique n'a que des valeurs propres réelles.
7. Soit $A$ une matrice symétrique et orthogonale. Alors $A^2 = I$.
8. Soit $Q(\mathbf{x}) = 2x_1x_2$. Alors la matrice $A$ telle que $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$ admet 0 comme valeur propre.
9. La fonction définie par $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_1$ est une forme quadratique.
10. Soit $A$ une matrice symétrique définie négative. Alors $A^2$ est définie positive.

**Exercice 9**

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ la matrice de taille $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que $A$ est semi-définie positive.

**Exercice 10**

Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont définies positives, négatives, semi-définies positives ou négatives ou indéfinies :

1. $q_1(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,
2. $q_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$,
3. $q_3(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2$,
4. $q_4(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2yz + z^2$,
5. $q_5(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz$.

**Exercice 11**

Soit la forme quadratique $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

1. Calculer la matrice $A$ associée à $q$.
2. Soient $\lambda_1, \lambda_2$ les deux valeurs propres de $A$. Montrer que $q$ est définie négative si et seulement si $ac > b^2$ et $a + c < 0$.
3. Avec le même type de calculs, en déduire les conditions nécessaires et suffisantes pour que $q$ soit définie positive.
4. Quand est-ce que $q$ est semi-définie positive ? Semi-définie négative ?
5. Finalement, quand est-ce que $q$ est indéfinie ?