MTH1008 (Algèbre linéaire appliquée) Groupe 10
Polytechnique Montréal
Hiver 2026

# TD#13 – Solutions

## 1 Exercices du manuel

**Section 7.4**

11. — Étapes 1 à 3 On trouve

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres rangées par ordre décroissant sont $\lambda_1 = 90$ et $\lambda_2 = 0$. La diagonalisation de $A^\top A$ en base orthonormée fournit les vecteurs

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3\sqrt{10}/10 \\ \sqrt{10}/10 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}.$$

La seule valeur singulière de $A$ est $\sigma_1 = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

— Étape 4

a. Le seul vecteur singulier à gauche est obtenu par

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}.$$

b. On doit compléter en trouvant $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Posons $\mathbf{u}_2 = (a, b, c)$. On cherche à ce que

$$\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}c = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a - 2b - 2c = 0.$$

Une solution possible est $\widetilde{\mathbf{u}_2} = (2, 1, 0)$. En normalisant, on obtient $\mathbf{u}_2 = (2\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5, 0)$. Posons maintenant $\mathbf{u}_3 = (d, e, f)$. On cherche à ce que

$$\begin{cases} 1/3d - 2/3e - 2/3f = 0 & (\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_3 = 0) \\ 2\sqrt{5}/5d + \sqrt{5}/5e = 0 & (\mathbf{u}_2^\top \mathbf{u}_3 = 0). \end{cases}$$

On résout donc le système de matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 4/5 & 0 \end{array}\right].$$

Une solution est $\widetilde{\mathbf{u}_3} = (2, -4, 5)$. En normalisant, on obtient

$$\mathbf{u}_3 = (2\sqrt{5}/15, -4\sqrt{5}/15, \sqrt{5}/3).$$

Une décomposition en valeurs singulières de $A$ est donc $A = U\Sigma V^\top$ où

$$U = \begin{bmatrix} 1/3 & 2\sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/15 \\ -2/3 & \sqrt{5}/5 & -4\sqrt{5}/15 \\ -2/3 & 0 & \sqrt{5}/3 \end{bmatrix}, \ \Sigma = \begin{bmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } V = \begin{bmatrix} -3\sqrt{10}/10 & \sqrt{10}/10 \\ \sqrt{10}/10 & 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}.$$

Pour obtenir une décomposition en valeurs singulières de $A^\top$, il suffit d'écrire $A^\top = (U\Sigma V^\top)^\top = V\Sigma^\top U^\top$.

15. a. La matrice au centre de la SVD fait apparaitre 2 valeurs singulières, donc $r = \text{rang}(A) = 2$.

    b. Une base de $\text{Im}(A)$ se trouve dans les $r$ premières colonnes de $U$, on peut donc prendre

$$\left( \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.37 \\ -0.84 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.78 \\ -0.33 \\ -0.52 \end{bmatrix} \right).$$

    Attention aux pièges pour identifier une base de $\text{Ker}(A)$ !

    — La SVD vous est donnée sous la forme $A = U\Sigma V^\top$, donc la dernière matrice n'est pas $V$, mais bien $V^\top$ ! Pour identifier les colonnes de $V$, il faut donc regarder les lignes de $V^\top$.

    — Combien de colonnes de $V$ faut-il retenir ? On voit que $A$ est une matrice à 3 colonnes, de rang 2. Une base de $\text{Ker}(A)$ est donc contenue dans la $3 - \text{rang}(A) = 3 - 2 = 1$ dernière colonne de $V$. Cette base peut être choisie comme

$$\left( \begin{bmatrix} 0.58 \\ -0.58 \\ 0.58 \end{bmatrix} \right).$$

21. Notons $B = PA$. Les valeurs singulières de $B$ sont les $\sqrt{\lambda}$ où $\lambda \in \text{Sp}(B^\top B)$. Or

$$B^\top B = (PA)^\top PA = A^\top P^\top PA = A^\top A,$$

puisque $P$ est orthogonale (donc en particulier, $P^\top P = I$). Ainsi $\text{Sp}(B^\top B) = \text{Sp}(A^\top A)$, donc les valeurs singulières de $B$ sont les $\sqrt{\lambda}$ où $\lambda \in \text{Sp}(A^\top A)$. Ce sont également les valeurs singulières de $A$.

**Exercice 5**

1. Faux. Une matrice admet autant de valeurs singulières que son rang. Or $\operatorname{rang}(\mathrm{O}_{m,n}) = 0$ quels que soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, donc la matrice nulle n'admet aucune valeur singulière, quelle que soit sa taille.
2. Faux. Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dont une SVD s'écrit $A = U\Sigma V^\top$. La construction de la SVD impose que les colonnes de $U$ et de $V$ forment des bases orthonormées de $\mathbb{R}^m$ et de $\mathbb{R}^n$, respectivement. Ces colonnes doivent donc être des vecteurs à composantes réelles, sans quoi ils ne pourraient pas former une base d'un de ces deux espaces, puisque $\mathbb{C}^n \not\subseteq \mathbb{R}^n$.
3. Vrai. Supposons que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. D'une part, les colonnes de $I$ forment bien une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. D'autre part, il faut vérifier que les éléments diagonaux de $A$ en sont bien des valeurs singulières. Si $A$ est diagonale, alors $A^\top A = A^2$ (puisque $A$ est symétrique) et $\operatorname{Sp}(A^\top A) = \{\lambda^2 : \lambda \in \operatorname{Sp}(A)\}$. Les racines carrées des valeurs propres de $A^\top A$ donnent donc bien les valeurs propres de $A$, qui correspondent à sa diagonale (puisque $A$ est diagonale).