MTH1008 (Algèbre linéaire appliquée) Groupe 10
Polytechnique Montréal
Hiver 2026

TD#4 – Solutions

Section 4.1

6. Cet ensemble ne peut être un s.e.v. de $\mathbb{P}_n$ puisque le polynôme constant nul $p(t) = 0$ n'est pas de cette forme.
12. $W = \text{Vect}\,\{(\}\,(1, 1, 2, 0), (3, -1, -1, 4))$ donc c'est un s.e.v..
18. En regroupant les coefficients devant chacune des variables, on obtient :

$$W = \text{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Puisque W peut s'exprimer comme l'espace engendré par une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$.

Section 4.2

17. $\text{Ker}(A)$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$, $\text{Im}(A)$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$.
22. La forme échelonnée réduite équivalente à A est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Deux vecteurs non nuls de $\text{Ker}(A)$ sont $(7, -4, 1, 0)$ et $(-6, 2, 0, 1)$. Ce sont ceux obtenus avec la méthode de calcul rapide du noyau, d'autres sont possibles. Ils seront systématiquement des combinaisons linéaires de ces deux-là. Un vecteur non nul de $\text{Im}(A)$ peut être obtenu en prenant n'importe laquelle des 3 premières colonnes de A, ou une combinaison linéaire de ces 3.

24. $A\mathbf{w} = \mathbf{0}$ donc $\mathbf{w} \in \text{Ker}(A)$. Le système $[A \mid \mathbf{w}]$ n'admet aucune solution donc $\mathbf{w} \notin \text{Im}(A)$.
26. a. Vrai, c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ (quand $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$). Vérifions-le :
    — <u>Élément nul :</u> $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ donc $\mathbf{0} \in \text{Ker}(A)$.

— Fermeture sous addition : Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(A)$. Montrons que $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(A)$.

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

donc $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(A)$.

— Fermeture sous multiplication scalaire : Soient $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(A)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrons que $\alpha\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(A)$.

$$A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(A\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Donc $\alpha\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(A)$.

b. Vrai. Si $\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(A)$, alors $\mathbf{x}$ est une combinaison linéaire des colonnes de A. Or les colonnes de A sont des vecteurs de $\mathbb{R}^m$.

c. Faux. Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$, mais le produit $A\mathbf{x}$ n'est défini que pour des vecteurs $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Donc l'ensemble des solutions de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est toujours inclus dans $\mathbb{R}^n$, pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Un contre-exemple peut être construit avec n'importe quelle matrice telle que $m \neq n$.

d,e,f. La notion d'application linéaire n'est pas au programme.

28. Notons

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -9 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 45 \end{bmatrix}.$$

Les deux systèmes s'écrivent donc respectivement $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ et $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$. Remarquer que $\mathbf{b}_2 = 5\mathbf{b}_1$. Par définition, $\mathrm{Im}(A)$ est l'ensemble des membres de droite $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ pour lesquels le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet au moins une solution. Puisque le premier système admet une solution, $\mathbf{b}_1 \in \mathrm{Im}(A)$. Mais $\mathrm{Im}(A)$ est un espace vectoriel donc il est fermé sous la multiplication scalaire, ce qui signifie que $\mathbf{b}_2 = 5\mathbf{b}_1 \in \mathrm{Im}(A)$. Donc $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ admet également une solution.

Section 4.3

8. Il s'agit d'une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, elle est donc nécessairement liée. Ce n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

admet 3 positions de pivot, donc de cette famille on peut extraire une famille libre de 3 vecteurs. Cette famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ étant libre, elle est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

10. En résolvant le système $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, on obtient :

$$\left[\ A \mid \mathbf{0}\ \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow x_1 - 5x_3 + 7x_5 = 0 \\ \leftarrow x_2 - 4x_3 + 6x_5 = 0 \\ \leftarrow x_4 - 3x_5 = 0 \end{array}.$$

En choisissant x_3 et x_5 pour variables libres, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = 5x_3 - 7x_5 \\ x_2 = 4x_3 - 6x_5 \\ x_4 = 3x_5 \end{cases}.$$

En fixant $x_3 = 1$ et $x_5 = 0$, on obtient donc la solution $(5, 4, 1, 0, 0)$. En fixant $x_3 = 0$ et $x_5 = 1$, on obtient la soltuion $(-7, -6, 0, 3, 1)$. Finalement, une base de $\mathrm{Ker}(A)$ est :

$$\left(\begin{bmatrix} -7 \\ -6 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ -6 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

16. Cela revient à déterminer une base de $\mathrm{Im}(A)$ où A est la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs.

20. La relation de dépendance linéaire permet d'exprimer n'importe quel vecteur comme une combinaison linéaire des deux autres, donc tout couple de deux vecteurs parmi les trois engendre H. Il n'existe de relation de colinéarité entre aucun couple de ces vecteurs, donc toute famille constituée de deux des trois vecteurs est libre. Ainsi, toute famille constituée de deux des trois vecteurs est une base de H.

25. Non, toute base de H n'est composée que d'éléments de H. Or $\mathbf{v}_1 \notin H$ et $\mathbf{v}_3 \notin H$.