MTH1008 (Algèbre linéaire appliquée) Groupe 10
Polytechnique Montréal
Hiver 2026

TD#5 – Solutions

Section 4.5

12. 3 pivots dans la matrice dont les colonnes sont constituées de ces vecteurs, donc la dimension de l'espace engendré est 3.
14. $\dim \mathrm{Im}(A) = \mathrm{rang}(A) = 3$ et $\dim \mathrm{Ker}(A) = 6 - 3 = 3$ (théorème du rang).
20. a. Traité en exercice récapitulatif.
    b. Faux. Prendre $A = I_2$, A est inversible donc $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$, pourtant il y a deux inconnues dans le système $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. C'est en revanche le nombre de variables libres dans ce système.
    c. Faux. Dans $\mathbb{R}^2$, si on considère la famille F formée de tous les vecteurs de forme $(k, 0)$ et $(0, k)$ pour $k \in \mathbb{R}$, alors clairement F est une famille infinie et $\mathrm{Vect}\,\{()\,F) = \mathbb{R}^2$. Pourtant, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.
    d. Faux. On peut considérer le même contre-exemple qu'à la question précédente.
    e. Vrai. La démonstration procède comme suit : on considère que W est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, et on a chercher à montrer que forcément, $W = \mathbb{R}^3$.
    — Puisque $\dim W = 3$, W admet une base $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) \subset W$.
    — Mais puisque $W \subseteq \mathbb{R}^3$, on a $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \in \mathbb{R}^3$.
    — D'autre part, cette famille étant libre dans W et W étant un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, cette famille est aussi libre dans $\mathbb{R}^3$.
    — La famille $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ est donc une famille libre de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, ce qui signifie que $\mathrm{Vect}\,\{()\,\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = \mathbb{R}^3$, et que c'en est une base.
    — W et $\mathbb{R}^3$ ont donc une base en commun. Or deux espaces vectoriels possédant une base en commun sont identiques.
    — Donc $W = \mathbb{R}^3$.

Section 4.6

4. $\mathrm{rang}(A) = 3$ (nombre de colonnes pivot). Donc d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 6 - 3 = 3$. Une base de $\mathrm{Im}(A)$ est donnée par les colonnes pivot de A (colonnes 1, 2

et 4). Une base de Lgn(A) est

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \\ 9 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 10 \\ 13 \\ -12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}.$$

En choisissant x_3, x_5 et x_6 comme variables libres dans l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, on trouve pour base de Ker(A) :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

6. $\dim \operatorname{Ker}(A) = 3 - 3 = 0$, $\dim \operatorname{Lgn}(A) = \operatorname{rang}(A^\top) = 3$.
10. $\dim(\operatorname{Im}(A)) = \operatorname{rang}(A) = 6 - 5 = 1$. En aucun cas $\operatorname{Im}(A) = \mathbb{R}^3$ puisque $\operatorname{Im}(A) \subset \mathbb{R}^6$.
12. $\dim(\operatorname{Lgn}(A)) = \operatorname{rang}(A^\top) = \operatorname{rang}(A) = 6 - 4 = 2$.
16. $\operatorname{rang}(A) \leq 4$ donc $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = 4 - \operatorname{rang}(A) \geq 4 - 4 = 0$. La valeur minimale possible de $\dim(\operatorname{Ker}(A))$ est 0. Autrement dit, il est possible que A soit de plein rang colonne.
18. a. Faux. Trouver un contre-exemple simple dans lequel $\operatorname{Im}(B) \neq \operatorname{Im}(A)$.
    b. Faux. Trouver un contre-exemple.
    c. Traité en classe.
    d. Vrai. Les lignes de $A^\top$ sont les colonnes de A.
    e. Vrai. La preuve est donnée dans le manuel.
32. $\mathbf{v} = (1, -3, 4)$.

Section 4.7

4. $P = P_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{D}}$ donc la relation (i).
10. En calculant $[\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2 \mid \mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2] \sim [I \mid P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}]$, on trouve :

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

et

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}.$$

12. a. Vrai. Toute matrice de changement de base est inversible.
    b. Faux. C'est l'inverse, il faut donc trouver un contre-exemple dans ce sens-là.

16. Compléter en voyant que $Q = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$.