MTH1008 (Algèbre linéaire appliquée) Groupe 10
Polytechnique Montréal
Hiver 2026

# TD#5 : Espaces vectoriels (dimension, rang, changements de bases)

## Programme



## 1 Dimension d'un espace vectoriel

### Exercice 1

Section 4.5, exercice 6.

### Exercice 2

Section 4.5, exercice 22.

## 2 Rang d'une matrice, théorème du rang

### Exercice 3

Section 4.6, exercice 8.

### Exercice 4

Soit

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

telle que $\text{rang}(A) = 2$ et $\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = 0$. Donner une base de $\text{Ker}(A)$.

**Exercice 5**

Section 4.6, exercice 28.

## 3 Bilan (partie 1)

**Exercice 6** (Vrai ou faux – Partie 1)

Dire des énoncés suivants s'ils sont vrais ou faux, et justifier.

1. $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.
2. Le seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 est $\mathbb{R}^3$ lui-même.
3. La dimension de $\mathrm{Ker}(A)$ est égale au nombre de colonnes de $A$ qui ne sont pas des colonnes pivot.

## 4 Changements de bases dans un espace vectoriel

**Exercice 7**

Section 4.7, exercice 4.

**Exercice 8**

Section 4.7, exercice 10.

**Exercice 9**

Soient $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 0, 2)$ et

$$W = \mathrm{Vect}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}.$$

Soient également $\mathbf{c}_1 = (1, 1, 0)$ et $\mathbf{c}_2 = (1, -1, 4)$. On note $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ et $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$. Soit enfin $\mathbf{x} = (2, 1, 2)$.

1. Montrer que $W$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner $\dim(W)$.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $W$.
3. Donner la matrice de changement de base (ou *matrice de passage*) de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, notée $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$.
4. Montrer que $\mathbf{x} \in W$ et donner ses coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

**Exercice 10**

Section 4.7, exercice 19. Une capsule de correction est disponible sous ce lien.