MTH1008 (Algèbre linéaire appliquée) Groupe 10
Polytechnique Montréal
Hiver 2026

TD#6 – Solutions

Section 1.8

2. $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.
6. Il s'agit de résoudre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
10. Il s'agit de déterminer $\operatorname{Ker}(A)$. Attention, on précise "tous les vecteurs", donc soit $\operatorname{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$, soit il faut en donner une représentation paramétrique (sous forme de $\operatorname{Vect}\{\}$, par exemple).
22. a. Vrai. Montrer que s'il existe A telle que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, pour tout $\mathbf{x}$, alors T vérifie bien les deux propriétés de la linéarité.
    b. Vrai. Par définition, l'image de T est $\operatorname{Im}(A)$.
    c. Faux. C'est une question d'existence (d'une solution à $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$).
    d. Vrai, ce sont les deux propriétés qui rendent une application *linéaire*. Félicitations, vous avez juste récité votre cours.
    e. Traité en exercice récapitulatif.
24. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Puisque $\operatorname{Vect}\{(\}\,\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p) = \mathbb{R}^n$, il existe des scalaires $c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$ tels que

    $$\mathbf{x} = \sum_{[} i = 1]^p c_i \mathbf{v}_i.$$

    D'où

    $$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T\left(\sum_{i=1}^{p} c_i \mathbf{v}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{p} c_i T(\mathbf{v}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} c_i \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

    Puisque $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, alors T est l'application nulle.

26. Si $\mathbf{x} \in P$, il existe $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{x} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$. D'où

$$T(\mathbf{x}) = T(s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = sT(\mathbf{u}) + tT(\mathbf{v}).$$

Donc $T(P) = \text{Vect}\,\{T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})\}$. Ceci est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Il ne peut pas s'agir de $\mathbb{R}^3$ puisqu'il est de dimension au plus 2. Il peut donc s'agir d'un plan passant par l'origine, d'une droite passant par l'origine ou de $\{\mathbf{0}\}$. Pour que ce soit un plan, il faut que la famille $(T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v}))$ soit libre.

Section 1.9

4.
$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

16. La matrice recherchée est $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

22. Il s'agit de résoudre le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

24. a. Vrai. La démonstration est à la slide 15 du cours 6.
    b. Vrai. C'est la méthode vue en cours, et elle se justifie par la démonstration de la slide 15 du cours 6 (point numéro 2).
    c. Faux. Cette transformation est en fait une rotation d'angle $\pi/2$. La matrice associée est donc
    $$\begin{bmatrix} \cos\pi/2 & -\sin\pi/2 \\ \sin\pi/2 & \cos\pi/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
    d. Faux. Considérer l'application $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ avec $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Si $\mathbf{x} = (1, 0)$, $T(\mathbf{x}) = (1, 1)$ est uniquement défini. Pourtant, cette application n'est pas injective (A n'est pas de plein rang colonne).
    e. Traité en classe.

Section 2.3

12. d. Faux. Avec $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, A ne possède qu'un seul pivot, et pourtant $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
    e. Traité en classe.

29. Elle n'est pas surjective non plus, puisque A est carrée.
38. Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ et que $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$, alors T n'est pas injective. Puisque A est carrée, la réponse est la même qu'à l'exercice précédent.

Section 4.2

35. — <u>Présence de l'élément nul :</u> Puisque U est un s.e.v. de V, $\mathbf{0}_V \in U$. Puisque T est linéaire, $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ donc $\mathbf{0}_W \in T(U)$.
    — <u>Fermeture sous addition :</u> Soient $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T(U)$. Il existe donc $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ tels que $\mathbf{w}_1 = T(\mathbf{u}_1)$ et $\mathbf{w}_2 = T(\mathbf{u}_2)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 &= T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2) \\ &= T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \end{aligned}$$

    par linéarité de T. Or, puisque U est un s.e.v. de V, $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in U$. Donc il existe un élément $\mathbf{u} \in U$ tel que $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = T(\mathbf{u})$ (cet élément est $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$). Ainsi, $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in T(U)$.
    — <u>Fermeture sous multiplication scalaire :</u> Soient $\mathbf{w} \in T(U)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Puisque $w \in T(U)$, il existe $\mathbf{u} \in U$ tel que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$. Donc $\alpha\mathbf{w} = \alpha T(\mathbf{u}) = T(\alpha\mathbf{u})$. Ainsi, comme au point précédent, $\alpha\mathbf{u} \in U$ et $\alpha\mathbf{w} \in T(U)$.

Section 4.3

31. Passer par la première caractérisation que l'on a donnée d'une famille liée : il existe une solution non triviale à $\sum_{i=1}^{p} x_i\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$. Transférer cette propriété sur les $T(\mathbf{v}_i)$ grâce à la linéarité de T.

Section 4.5

31. Soit $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_p)$ une base de $T(H)$, on a donc $\dim T(H) = p$. Puisque ces vecteurs sont dans $T(H)$, il existe $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in H$ tels que $\mathbf{w}_i = T(\mathbf{v}_i)$, pour tout $i \in [\![1; p]\!]$. Puisque cette famille forme une base de $T(H)$, elle est libre dans $T(H)$. L'exercice 4.3-31 a démontré que la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$ est donc libre dans H. D'après le théorème de la base incomplète, il s'ensuit que $\dim H \geq p = \dim T(H)$.
32. Soit $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$ une base de H.
    — Montrons que $\mathrm{Vect}\,\{()\,T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_p)) = T(H)$. Pour cela, soit $\mathbf{w} \in T(H)$, il existe donc $\mathbf{v} \in H$ tel que $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$. Mais puisque $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$ est une base de H, il existe $c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} c_i\mathbf{v}_i.$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbf{w} = T(\mathbf{v}) &= T\left(\sum_{i=1}^{p} c_i \mathbf{v}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{p} c_i T(\mathbf{v}_i).\end{aligned}$$

Donc Vect $\{(\}\, T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_p)) = T(H)$.

— D'autre part, on peut montrer que si T est injective, l'image de toute famille libre de V par T est libre dans W. Il s'ensuit que $(T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_p))$ est libre dans W, donc dans $T(H) \subseteq W$.

Finalement, $(T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_p))$ est une base de $T(H)$ et donc $\dim T(H) = p = \dim(H)$.

33. a. Avec cette méthode, on obtient la base de $\mathbb{R}^5$ suivante : $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$.
    b. Utiliser le théorème de la base extraite.