MTH1008 (Algèbre linéaire appliquée) Groupe 10
Polytechnique Montréal
Hiver 2026

TD#7 : Mombres complexes

Programme

1 Manipulation de nombres complexes sous forme algébrique **1**

2 Module, argument, formes polaire et exponentielle **1**

3 Formule de De Moivre et racines $n^{\text{èmes}}$ **3**

4 Récapitulatif **3**

5 Exercices supplémentaires **3**

1 Manipulation de nombres complexes sous forme algébrique

Exercice 1 (Quotient sous forme algébrique)

Donner la forme algébrique de $\frac{7+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$.

Exercice 2

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$, alors $z/\overline{z} = \mathrm{i}$.

2 Module, argument, formes polaire et exponentielle

Exercice 3

Soient $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$. Donner chacun des nombres complexes suivants sous formes exponentielle puis polaire :

1. z_1 et z_2 ;
2. $z_1 z_2$;
3. $\frac{z_1}{z_2}$;
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

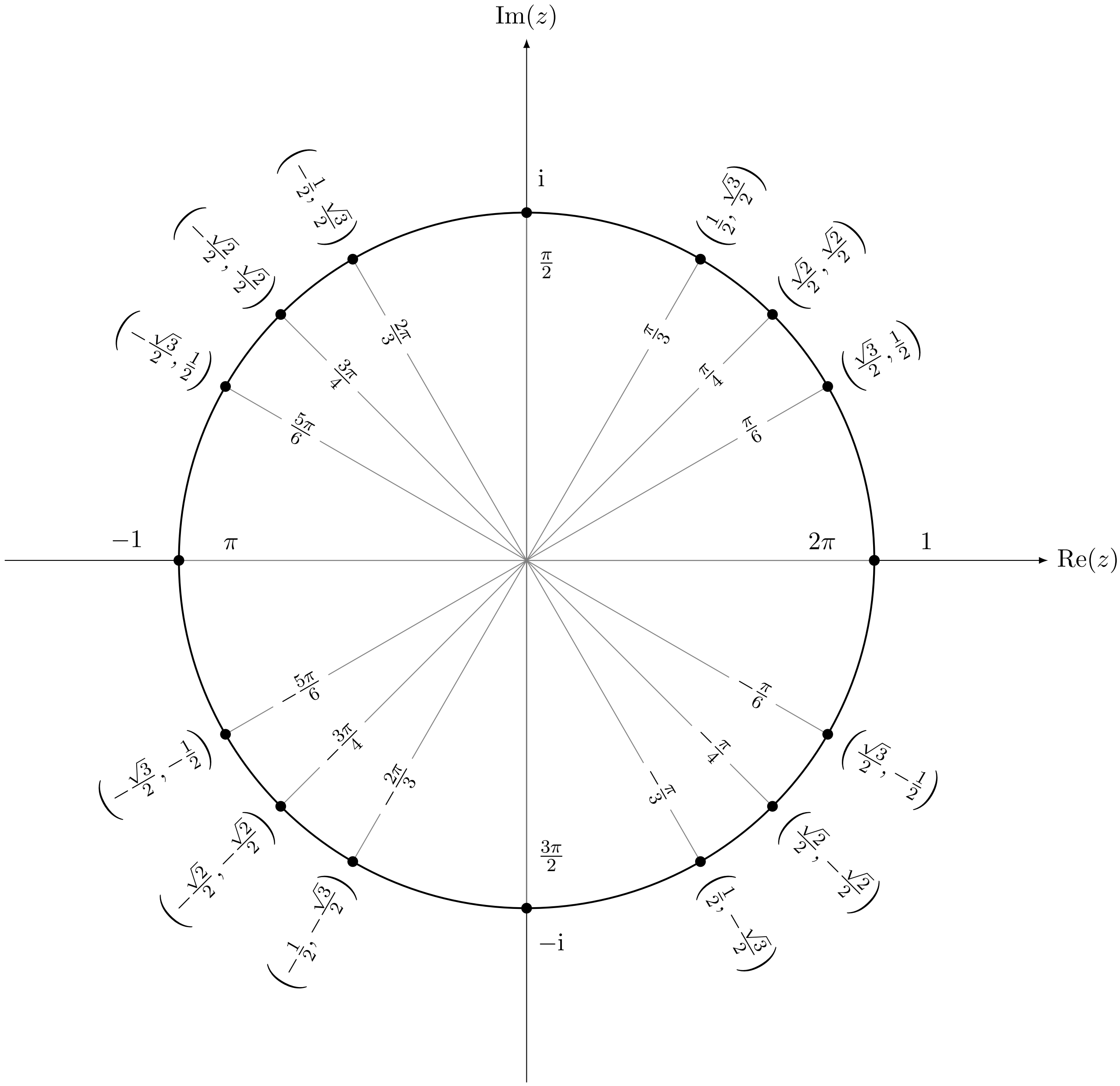

FIGURE 1 – Quelques valeurs remarquables sur le cercle trigonométrique

Exercice 4

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que $|z| = 1$ si et seulement si $\frac{1+z}{1-z}$ est un imaginaire pur.

3 Formule de De Moivre et racines $n^{\text{èmes}}$

Exercice 5

Soit

$$z = \frac{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^3}{1-\mathrm{i}}.$$

1. Donner $|z|$.
2. Donner $\arg(z)$,
3. En déduire une expression de z sous forme exponentielle.

Exercice 6

Déterminer :

1. l'ensemble des racines cubiques de $w = 2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$;
2. l'ensemble des racines quatrièmes de $w = 16$.

4 Récapitulatif

Exercice 7 (Vrai ou faux ?)

Dire des énoncés suivants s'ils sont vrais ou faux, et justifier.

1. Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2)$.
2. Tout nombre complexe non nul a deux racines carrées distinctes.
3. Si z est un nombre complexe, alors e^z est toujours un nombre réel.

5 Exercices supplémentaires

Ces exercices sont organisés par difficulté.

Exercice 8 (Opérations de base sous forme algébrique)

Soient $z_1 = 2 + 3\mathrm{i}$ et $z_2 = -1 + 4\mathrm{i}$.

1. Calculer la somme $z_1 + z_2$ et donner le résultat sous forme algébrique.

2. Calculer le produit $z_1 z_2$ et donner le résultat sous forme algébrique.
3. Calculer le quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$ et donner le résultat sous forme algébrique.

Exercice 9

Donner l'ensemble des solutions de l'équation

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Note : Les solutions de cette équation sont des nombres complexes non réels. Pour cette raison, la question pourrait vous être posée en remplaçant l'inconnue x par l'inconnue z. Cette notation n'a aucune importance.

Exercice 10

Soit $z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = 1 + 3\mathrm{i}$ et $z_3 = 5\mathrm{i}$.

1. Donner $\operatorname{Im} z_1$, $\operatorname{Im} z_2$ et $\operatorname{Im} z_3$.
2. Donner $\operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_3$ puis $\operatorname{Re} z_1 + z_3$.
3. Donner $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_3$ sous forme algébrique.
4. Donner $z_1 z_2$ et $z_2 z_3$ sous forme algébrique.

Exercice 11 (Vrai ou faux ?)

Dire des énoncés suivants s'ils sont vrais ou faux, et justifier.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = \operatorname{Re}(z)$ alors $z \in \mathbb{R}$.
2. Le module d'un nombre complexe z est toujours un nombre réel positif ou nul.
3. L'argument d'un nombre complexe est unique.
4. Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.
5. Soit n un entier positif, alors l'ensemble des solutions (dans $\mathbb{C}$) de $z^n = 1$ est inclus dans celui de $z^{2n} = 1$.
6. Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, alors $B = \frac{1}{2}(A^\top + A)$ est hermitienne.
7. Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, alors $B = \frac{1}{2}(A^* + A)$ est hermitienne.

Exercice 12

Soit $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i} \in \mathbb{C}$.

1. Exprimer z_1 sous sa forme exponentielle.
2. Calculer z_1^3 en utilisant la formule de De Moivre.

Exercice 13

Soient $z_1 = 2 + \sqrt{12}\mathrm{i}$ et $z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$, mettre sous forme polaire et exponentielle puis calculer $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$. Donner le résultat sous forme exponentielle.

Exercice 14

Soit $z = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$.

1. Déterminer le module $|z|$ et l'argument $\arg(z)$.
2. Écrire z sous sa forme exponentielle.
3. Calculer z^6 et donner le résultat sous forme algébrique $a + b\mathrm{i}$

Exercice 15

Soit $z = 3 - 4\mathrm{i}$.

1. Donner le conjugué $\overline{z}$.
2. Calculer le module $|z|$.
3. Vérifier que $z\overline{z} = |z|^2$.

Exercice 16

Soit $z_1 = -3 - \sqrt{3}\mathrm{i}$, $z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \mathrm{i}$, $z_3 = -5 + 5\mathrm{i}$ et $z_4 = 10$.

1. Donner z_1, z_2,z_3 et z_4 sous forme polaire puis sous forme exponentielle.
2. Donner $z_1 z_2$, $z_3 z_4$, z_1/z_3 sous forme exponentielle.
3. Donner $(z_3)^4$ sous forme exponentielle.

Exercice 17

Soient $z_1 = 3e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = 2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

1. Donner z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. Calculer le produit $z_1 z_2$ et donner le résultat sous forme exponentielle puis sous forme polaire.
3. Calculer le quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$ et donner le résultat sous forme exponentielle puis sous forme polaire.

Exercice 18 (Produit et quotient en forme exponentielle)

Soient

$$z_1 = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}, \qquad z_2 = 3e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

1. Déterminer le module et l'argument principal de z_1z_2 sans repasser par la forme algébrique.
2. Donner la forme exponentielle puis la forme algébrique de z_1z_2.
3. Même travail pour $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Exercice 19 (Lien module–argument (preuve))

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$.

1. Prouver, en passant par exemple par la forme exponentielle, que
$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|\,, \qquad \operatorname{Arg}\bigl(z_1z_2\bigr) \equiv \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \pmod{2\pi}.$$
2. Prouver de même
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \operatorname{Arg}\Bigl(\frac{z_1}{z_2}\Bigr) \equiv \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2) \pmod{2\pi}.$$
3. Vérifier ces résultats avec $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = -1 + \mathrm{i}$.

Exercice 20 (Inverse et conjugué)

Soit $z = -5 + 5\mathrm{i}$.

1. Calculer $|z|$ et son argument principal $\operatorname{Arg}(z)$.
2. Écrire z sous forme exponentielle.
3. Calculer $\dfrac{1}{z}$ puis donner $1/\overline{z}$, chacun sous forme algébrique $a + b\mathrm{i}$.

Exercice 21 (Unité et argument opposé)

Soient $u, v \in \mathbb{C}^*$ tels que
$$|u| = |v|\,, \qquad \operatorname{Arg}(v) = -\operatorname{Arg}(u).$$

1. Montrer que $uv \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que $uv > 0$.
3. Illustrer avec $u = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}},\ v = 2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$.

Exercice 22 (Inverse multiplicatif)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

1. Montrer, à partir de la forme de votre choix, que
$$z \times \frac{1}{z} \;=\; 1.$$

2. Vérifier explicitement cette égalité pour $z = 3 - 4\mathrm{i}$.

Exercice 23

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

1. Montrer que $B = A^*A$ est hermitienne.
2. Montrer que $\overline{B} = B^\top$.
3. *Rappel :* pour toute matrice $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$, si $\overline{M} = M$, alors $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Montrez que $B^\top + B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Exercice 24

Soit $z = \sigma + i\omega$ un nombre complexe tel que $z \neq 1$. Montrer que $\sigma < 0$ si et seulement si $\frac{1-z}{1+z} < 1$.

Exercice 25 (Inégalité triangulaire 1)

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

1. Montrer l'inégalité triangulaire (en essayant de ne pas regarder dans le cours) :

$$|z_1 + z_2| \;\leq\; |z_1| + |z_2|\,.$$

2. Déterminer la (les) condition(s) d'égalité.

Exercice 26 (Inégalité triangulaire 2)

1. Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Utiliser l'inégalité triangulaire pour établir

$$|z_1 + z_2 + z_3| \;\leq\; |z_1| + |z_2| + |z_3|\,.$$

2. Vérifier cette inégalité pour $z_1 = 1 + \mathrm{i},\ z_2 = -2 + 2\mathrm{i},\ z_3 = -1 - 3\mathrm{i}$. Préciser si l'égalité est atteinte.

Exercice 27 (Cercle unité et angles remarquables)

Soit le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathbf{0},\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2)$.

1. Tracer le *cercle unité*, c'est-à-dire l'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = 1\right\}$.
2. À l'aide du sens direct (anti-horaire), placer les points associés aux angles suivants :

$$\theta \in \left\{0, \tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{2\pi}{3}, \tfrac{3\pi}{4}, \tfrac{5\pi}{6}, \pi, \tfrac{7\pi}{6}, \tfrac{5\pi}{4}, \tfrac{4\pi}{3}, \tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{5\pi}{3}, \tfrac{7\pi}{4}, \tfrac{11\pi}{6}\right\}.$$

3. Pour chaque angle θ ci-dessus, donner les coordonnées cartésiennes du point, *i.e.* $\big(\cos\theta,\ \sin\theta\big)$.

4. Vérifier sur deux exemples au choix les identités

$$\cos(-\theta) = \cos\theta, \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta.$$

Exercice 28 (Norme et transconjugué)

Soit le vecteur complexe colonne

$$\mathbf{x} \;=\; \begin{bmatrix} 2+\mathrm{i} \\ -1+3\mathrm{i} \\ 4 \end{bmatrix} \;\in\; \mathbb{C}^3.$$

1. Calculer son conjugué $\overline{\mathbf{x}}$ et son transconjugué $\mathbf{x}^*$.
2. Déterminer sa norme $\|\mathbf{x}\|$.
3. Vérifier numériquement que $\|\mathbf{x}\|^2 \;=\; \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$.

Exercice 29 (Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$ et

$$U_n = \left\{ e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![0; n-1]\!] \right\},$$

l'ensemble des racines n-èmes de l'unité.

1. Montrer, si possible sans regarder le cours, que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} = 0$.
2. En déduire que les vecteurs correspondant aux racines de U_n forment un polygone régulier centré en l'origine.

Exercice 30 (Matrices hermitiennes)

Soit la matrice complexe carrée

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer la matrice adjointe A^*.
2. La matrice A est-elle hermitienne ?
3. Montrer que $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^2$.
4. Vérifier cette propriété pour $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}$.

Exercice 31 (Inégalité de Cauchy–Schwarz)

Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ non nuls.

1. Montrer que $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$. (Piste : considérer $\|\mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}\|^2$ pour un choix judicieux de $\lambda \in \mathbb{C}$.)
2. Donner la (ou les) condition(s) d'égalité.
3. Vérifier numériquement l'inégalité pour $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}$.

Exercice 32

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{C})$ tel que $p(z) = a + bz + cz^2 + dz^3 = 0$.

1. Montrer que $p(\overline{z}) = 0$.
2. Soit $z_0 = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ tel que $\overline{z_0} = z_0$. Montrer que $z_0 \in \mathbb{R}$.
3. On rappelle que p a exactement 3 racines complexes. On a pu constater que deux d'entre elles sont z et $\overline{z}$. Soit $r \in \mathbb{C}$ sa dernière racine, supposons que $r \neq z$ et $r \neq \overline{z}$. Montrer que $r \in \mathbb{R}$ (par exemple en montrant que $\overline{r} = r$).
4. (*Plus difficile*) Était-il possible que $r = z$ ou $r = \overline{z}$?