MTH1008 (Algèbre linéaire appliquée) Groupe 10
Polytechnique Montréal
Hiver 2026

TD#8 – Solutions

Section 5.1

7. Oui car $\det(A-4I)=0$.
13. 3 valeurs propres distinctes pour $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ donc pour chaque $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, une famille constituée d'un vecteur propre associé à λ est une base de $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)$.
18. La matrice est triangulaire inférieure : lire ses valeurs propres sur sa diagonale.
21.
    a. Traité en classe.
    b. Faux. La matrice nulle n'est pas inversible, mais 0 en est une valeur propre.
    c. Vrai : $c \in \mathrm{Sp}(A) \iff \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ tel que $A\mathbf{x} = c\mathbf{x}$. Réécrire cette égalité donne le résultat désiré.
    d. Vrai. Cette question est sans intérêt.
    e. Traité en classe.
35. On complète le dessin en calculant :

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = 2\mathbf{u}, \quad T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = 3\mathbf{v}, \quad T(\mathbf{w}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}.$$

Section 5.2

6. $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 11\lambda - 8$.
19. Remplacer λ par 0 dans cette équation et trouver :

$$\det(A) = \det(A - 0I) = (\lambda_1 - 0)(\lambda_2 - 0)\dots(\lambda_n - 0) = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n.$$

27.
    a. Trouver $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$ et $A\mathbf{v}_3 = \frac{1}{5}\mathbf{v}_3$. On notera $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ et $\lambda_3 = \frac{1}{5}$.
    b. Montrer que la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ est libre. Puisqu'une famille libre de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ génère $\mathbb{R}^3$, on en déduit que $\mathrm{Vect}\,\{()\}\,\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \mathbb{R}^3$. On a ainsi prouvé que $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, d'où l'existence de cette décomposition pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Notons $\mathbf{x}_0 = (a, b, c)$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Remarquer que $\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_0 = a + b + c = 1$, puisque $\mathbf{x}_0$ est un vecteur de probabilité. Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{w}^\top \underbrace{(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3)}_{\mathbf{x}_0} \\ &= c_1\mathbf{w}^\top\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{w}^\top\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{w}^\top\mathbf{v}_3 \\ &= c_1 \times 1 + c_2 \times 0 + c_3 \times 0 \qquad = c_1. \end{aligned}$$

c. Puisque $\mathbf{x}_0$ est un vecteur de probabilité, on a de nouveau $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ avec $c_1 = 1$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k &= A^k\mathbf{x}_0 \\
&= A^k(\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3) \\
&= A^k\mathbf{v}_1 + c_2A^k\mathbf{v}_2 + c_3A^k\mathbf{v}_3 \\
&= \lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + c_3\lambda_3^k\mathbf{v}_3 \\
&= 1^k\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{1}{2}\right)^k\mathbf{v}_2 + c_3\left(\frac{1}{5}\right)^k\mathbf{v}_3 \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathbf{v}_1.
\end{aligned}$$