

TD#9 – Solutions

Section 5.3

5. $\text{Sp}(A) = \{1, 5\}$. Une base de $\text{Ker}(A - I)$ est donnée par les 2 dernières colonnes de P . Une base de $\text{Ker}(A - 5I)$ est donnée par la première colonne de P .
7. $\text{Sp}(A) = \{-1, 1\}$. $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ admet 2 valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable. Une base de $\text{Ker}(A + I)$ est $((0, 1))$ et une base de $\text{Ker}(A - I)$ est $((1, 3))$. Ainsi $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

21. a. Faux : il faut en plus que D soit diagonale. À titre de contre-exemple, posons

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$D = A$ et $P = I$. On a bien $A = IAI^{-1} = PDP^{-1}$, et pourtant A n'est pas diagonalisable. Pour que la réponse soit complète, il faut montrer ici que A n'est pas diagonalisable.

- b. Vrai. Soit $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A . Posons $P = [\mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

où λ_i est la valeur propre de A associée à $\mathbf{x}_i$. On a alors $A\mathbf{x}_i = \lambda\mathbf{x}_i$, d'où $AP = PD$ et $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale.

- c. Faux. La matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

admet bien une valeur propre de multiplicité 2 (donc 2 en comptant les multiplicités). Pourtant, elle n'est pas diagonalisable.

- d. Traité en classe.

- 31., 32. Traités dans le vrai ou faux en classe.

Section 5.5

5. On trouve $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 8$. La formule quadratique donne $\Delta = -16 = (4i)^2$.
D'où $\lambda_1 = 2 - 2i$ et $\lambda_2 = 2 + 2i$.

$$A - (2 - 2i)I = \begin{bmatrix} -2 + 2i & 1 \\ -8 & 2 + 2i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 + 2i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

puisque $A - (2 - 2i)I$ ne peut pas être de plein rang. Une base de $\text{Ker}(A - (2 - 2i)I)$ est donc donnée par $((1, 2 - 2i))$.

17. On trouve $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{6}{5}\lambda + 1$ et $-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \in \text{Sp}(A)$. Un vecteur propre associé est $(2 - i, 5)$. Donc $A = PCP^{-1}$ avec

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$