

## TD#9 : Diagonalisation

### Programme

|   |                                                         |   |
|---|---------------------------------------------------------|---|
| 1 | Diagonalisation pratique d'une matrice                  | 1 |
| 2 | Multiplicités et caractère diagonalisable d'une matrice | 2 |
| 3 | Valeurs et vecteurs propres complexes                   | 2 |
| 4 | Vrai ou faux ?                                          | 2 |

### 1 Diagonalisation pratique d'une matrice

#### Exercice 1

 Section 5.3, exercice 3.

#### Exercice 2

 Section 5.3, exercice 11.

#### Exercice 3

Soient  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'application linéaire définie par  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ . Supposons que  $A$  soit diagonalisable sous la forme  $A = PDP^{-1}$ . Si  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  est la première colonne de la matrice  $P$ , laquelle de ces propositions est vraie ?

- $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .
- La famille  $(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}))$  est une famille liée de  $\mathbb{R}^n$ .
- La famille  $(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}))$  forme une base de  $\mathbb{R}^n$ .
- $T$  est bijective.

## 2 Multiplicités et caractère diagonalisable d'une matrice

### Exercice 4

 Section 5.3, exercices 23 et 25.

### Exercice 5 (Suite du 5.2-18)

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Donner la ou les valeur(s) de  $h$  pour laquelle (lesquelles)  $A$  n'est pas diagonalisable.

### Exercice 6 (Diagonaliser avec subtilité)

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Parmi les propositions suivantes, laquelle est équivalente à l'énoncé “ $A$  est diagonalisable” ? Justifier.

1. Les sous-espaces propres associés à chacune des valeurs propres de  $A$  ont tous la même dimension.
2.  $A$  admet  $n$  valeurs propres distinctes.
3. On peut construire une base de  $\mathbb{R}^n$  à partir de  $n$  vecteurs propres de  $A$ .
4. Les valeurs propres de  $A$  sont toutes strictement positives.

## 3 Valeurs et vecteurs propres complexes

### Exercice 7

 Section 5.5, exercice 3.

### Exercice 8

 Section 5.5, exercice 15.

## 4 Vrai ou faux ?

### Exercice 9 (Vrai ou faux ?)

Dire des énoncés suivants s'ils sont vrais ou faux, et justifier.

1. Soient  $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Si  $A$  est semblable à  $B$  et que  $B$  est semblable à  $C$ , alors  $A$  est semblable à  $C$ .
2. Toute matrice diagonalisable est inversible.
3. Toute matrice inversible est diagonalisable.